فهرست مطالب

۱ تعاریف مقدماتی **۱**

۱.۱ تعریف ۱

۲.۱ جابجایی ۲

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

مقدمه

تعریف گروه آبلی، روش ساده فهمیدن اینکه چرا این گروهها را جابجایی نامیده‌اند، فراهم می‌کند. درواقع چون هر دو زوج از عضوهای یک گروه آبلی لزوماً جابجایی هستند

۱.۱ تعریف

تعریف ۱.۱.۱. عمل دوتایی: فرض کنید G یک مجموعه باشد، عمل دوتایی روی G یک تابع است که هر دو زوج از اعضای G را به عضو دیگر G می‌برد.

با این تعریف عمل دو تایی، مفهوم گروه را بیان می‌کنیم.

تعریف ۲.۱.۱. گروه : فرض کنید G یک مجموعه ناتهی با یک عمل دوتایی (که اغلب ضرب نامیده می‌شود) است که به هر زوج (a, b) از اعضای G یک عضو دیگر G را که با ab نشان می‌دهیم، اختصاص دهد. گوییم که G با این رابطه (عمل) زیر یک گروه است:

۱. **شرکت‌پذیری** : عمل تعریف شده شرکت‌پذیر است هرگاه:

$$\forall a, b, c \in G \quad (ab)c = a(bc).$$

۲. **همانی** : یک عضو e در G وجود دارد (که همانی نامیده می‌شود)به طوریکه:

$$\forall a \in G, \quad ae = ea = a.$$

۳. **معکوس**: برای هر عضو a در G ،یک عضو دیگر b در G وجود دارد (که معکوس نامیده می‌شود) به‌طوریکه :

$$ab = ba = e.$$

۲.۱ جابجایی

با استفاده از مفهوم مرکز گروه و مرکزساز یک عضو گروه آبلی، مفهوم جابجایی گروه را بسط می‌دهیم. ابتدا خانواده خاصی از گروهها را معرفی می‌کنیم.
گروههای دووجهی نقش مهمی در مثالهای، جابجایی گروه‌های ناآبلی دارند.

تعریف ۱.۲.۱. گروه دووجهی : گروه دووجهی D_n یک گروه متقارن از چندوجهی‌های منتظم n ضلعی می‌باشد که $n > ۱$. مرتبه گروه D_n برابر $۲n$ است.
بسته به مرتبه، تعداد اعضای گروه متناهی یا نامتناهی هستند. مرتبه گروه G را با $|G|$ نشان می‌دهیم.

برای توضیح بیشتر این تعریف یک مثال از گروه دووجهی $D_۴$ از مرتبه ۸ را بررسی می‌کنیم.

ملاحظه ۲.۲.۱. *چرا نمی‌توانم کلمه ملاحظه را به تبصره تغییر دهم؟*

نتیجه ۳.۲.۱.

مثال ۴.۲.۱.

گزاره ۵.۲.۱.

ملاحظه ۶.۲.۱. *لوپ شبه گروهی است که دارای عضو همانی باشد.*

ملاحظه ۷.۲.۱. *هنگام کار با لوپ‌های موفانگ، می‌توان در عبارتی که فقط دو عضو متمایز وجود دارد، از پرانتزها صرف‌نظر کرد. زیرا با قرار دادن $z = ۱$ ، در هریک از تساوی‌های مربوط به لوپ موفانگ، نتیجه می‌شود*

$$(xy)x = x(yx).$$

ملاحظه ۸.۲.۱. *همه لوپ‌های موفانگ دارای خاصیت وارون هستند؛ یعنی هر عضو دلخواه لوپ، مانند x ، وارون دوطرفه دارد که در اتحادهای زیر صدق می‌کند:*

$$x^{-۱}(xy) = (x^{-۱}x)y = y$$

$$(yx)x^{-1} = y(xx^{-1}) = y$$

این مطلب نتیجه می‌دهد $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ *، آنگاه داریم :*

$$z = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

پس

$$x = z^{-1}y^{-1} = (yz)^{-1}.$$

بنابراین $x(yz) = e$ *را خواهیم داشت.*