

$$\left(\frac{\beta n}{a}\right)^2\left(\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{q_2^2}\right)=\left[\frac{J_n'(p_1a)}{p_1J_n(p_1a)}+\frac{k_n'(q_2a)}{q_2k_n(q_2a)}\right]\left[\frac{k_1^2}{p_1}\frac{J_n'(p_1a)}{J_n(p_1a)}+\frac{k_2^2}{q_2}\frac{k_n'(q_2a)}{k_n(q_2a)}\right]$$