فهرست مطالب

فصل سوم

درونیابی

۱.۳ مقدمه

عبارت

$$y = f(x), \quad x_{\cdot} \leq x \leq x_n.$$

به این معنی است که: نظر به هر قیمت x یک یا چند قیمت y در انتروال $x_{\cdot} \leq x \leq x_n$ وجود دارد. فرض کنیم $f(x)$ یک تابع یک متحوله، متمادی و صریح باشد، پس قیمت‌های $f(x)$ نظر به قیمت‌های مشخص x یعنی $x_{\cdot}$، $x_{۱}$،...، x_n به آسانی قابل محاسبه می‌باشد. برعکس این مسئله، بحث اساسی انالیز عددی را تشکیل می‌دهد. یعنی، یک ست از قیمت‌های $(x_{\cdot}, y_{\cdot})$، $(x_{۱}, y_{۱})$، $(x_{۲}, y_{۲})$،...، (x_n, y_n) که رابطه $y = f(x)$ را صدق میکند در یک جدول داده‌شده است، اما معادله صریح $f(x)$ معلوم نمی باشد. نیاز است تا ساده ترین تابع مانند $\phi(x)$ را دریافت نماییم، طوریکه $f(x)$ و $\phi(x)$ نسبت به *ست قیمت‌های داده‌شده در جدول دارای عین قیمت باشند.* این روند بنام *درونیابی* یا انترپولیشن[1] یاد می‌شود. هرگاه $\phi(x)$ یک پولینوم باشد، این روند بنام *درونیابی پولینومی* یاد شده و $\phi(x)$ بنام *پولینوم درونیاب* یاد می‌شود. به روش مشابه انواع مختلف درونیابی نسبت به $\phi(x)$ که آیا یک سلسله مثلثاتی معین، سلسله تابع بیسل و غیره می‌باشد، وجود دارد. در این فصل فقط با درونیابی پولینومی سروکار خواهیم داشت. در اینجا برای تقریب یک تابع مجهول بوسیله یک پولینوم، یک قضیه را بدون اثبات به عنوان یک دلیل ذکر می‌کنیم. یک قضیه مشهور وایرشترس[2] بیان می‌کند: هرگاه $f(x)$ در $x_{\cdot} \leq x \leq x_n$ متمادی باشد، پس برای هر $\varepsilon > ۰$ یک پولینوم

---

[1] Interpolation

[2] Weierstrass (1885)

$P(x)$ وجود دارد، طوریکه برای هر x از $(x_\cdot, x_n)$ داریم:

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

یعنی هرگاه یک $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد برای هر x از $(x_\cdot, x_n)$ می‌توانیم یک پولینوم $P(x)$ را دریافت نماییم، طوریکه گراف آن در ساحه محدود شده بین $y = f(x) - \varepsilon$ و $y = f(x) + \varepsilon$ قرار دارد. وقتیکه یک تابع $f(x)$ را بوسیله یک پولینوم $p(x)$ تقریب می‌زنیم، سوالات ذیل مطرح می‌شود: (i) تفاوت قیمت تقریبی و قیمت دقیق تابع چگونه محاسبه می‌شود؟ و (ii) شرایط دریافت بهترین تقریب تابع چیست؟ اگر چه جواب این سوالات مهم است و مربوط به مسائل درونیابی عملی می‌باشد اما از دایره بحث این کتاب بیرون است. در بخش بعدی یک فورمول را برای دریافت خطای تقریب یک تابع جدولی بوسیله یک پولینوم دریافت می‌نماییم.

۲.۳ خطای درونیابی پولینومی

فرض کنیم تابع $y(x)$ که بوسیله $(n+۱)$ نقاط (x_i, y_i)، $i = ۰, ۱, ۲, ..., n$ تعریف شده است، متمادی و $(n+۱)$ بار مشتق پذیر باشد، و فرض کنیم $y(x)$ بوسیله یک پولینوم $\phi_n(x)$ با درجه کمتر یا مساوی به n تقریب زده شده است، طوریکه

$$\phi_n(x_i) = y_i, \quad i = ۰, ۱, ۲, ..., n. \qquad (۱.۳)$$

حال، هرگاه برای بدست آوردن یک قیمت تقریبی دیگر $y(x)$ در یک نقطه غیر از نقاط (۱.۳)، $\phi_n(x)$ را بکار ببریم، دقت این تقریب چه مقدار خواهد بود؟ چون جمله $y(x) - \phi_n(x)$ برای قیمت‌های $x = x_\cdot, x_۱, ..., x_n$ صفر است. داریم:

$$y(x) - \phi_n(x) = L \prod\nolimits_{n+۱}(x), \qquad (۲.۳)$$

طوریکه

$$\prod\nolimits_{n+۱}(x) = (x - x_\cdot)(x - x_۱)...(x - x_n). \qquad (۳.۳)$$

و L طوری دریافت می‌گردد که برای هر قیمت $x = x'$، $x_\cdot < x' < x_n$ معادله (۲.۳) صدق کند. واضح است

$$L = \frac{y(x') - \phi_n(x')}{\prod\nolimits_{n+۱}(x')}. \qquad (۴.۳)$$

تابع $F(x)$ را طور ذیل تشکیل می‌دهیم:

$$F(x) = y(x) - \phi_n(x) - L \prod_{n+۱}(x), \qquad (۵.۳)$$

طوریکه L در معادله (۴.۳) قبلا داده شده است. آشکار است که

$$F(x_۰) = F(x_۱) = ... = F(x_n) = F(x') = ۰,$$

یعنی $F(x)$ برای $(n+۲)$ نقاط در آنتروال $x_۰ \leq x \leq x_n$ مساوی به صفر است در نتیجه با کابرد متوالی قضیه رول (قضیه **؟؟** را در بخش **؟؟** نگاه کنید) $F'(x)$ در $(n+۱)$ نقاط و $F''(x)$ در n نقاط و ... در $x_۰ \leq x \leq x_n$ صفر است. بویژه $F^{(n+۱)}(x)$ در یک نقطه‌ای این انتروال مساوی به صفر می‌باشد. فرض کنیم این نقطه با $x = \xi$، $x_۰ \leq \xi \leq x_n$ داده شده باشد. هرگاه معادله (۵.۳) را $(n+۱)$ بار نظر به x مشتق بگیریم و $x = \xi$ وضع نماییم، داریم:

$$۰ = y^{(n+۱)}(\xi) - L(n+۱)!,$$

طوریکه

$$L = \frac{y^{(n+۱)}(\xi)}{(n+۱)!}. \qquad (۶.۳)$$

از مقایسه معادلات (۴.۳) و (۶.۳) داریم:

$$y(x) - \phi_n(x) = \frac{\prod_{n+۱}(x)}{(n+۱)!} y^{(n+۱)}(\xi), \quad x_۰ < \xi < x_n, \qquad (۷.۳)$$

که افاده مورد نظر برای خطا می‌باشد. چون $y(x)$ بصورت عموم نامعلوم می‌باشد، بنابرین ما در مورد $y^{(n+۱)}(x)$، هیچ نوع معلوماتی نداریم، فورمول (۶.۳) همیشه در محاسبات عملی بدون کاربرد می‌باشد. از طرف دیگر در کارهای نظری در بخش‌های مختلف انالیز عددی بیشترین کاربرد را دارد. بویژه برای دریافت خطای فورمول درونیابی نیوتن که در بخش **؟؟** بررسی خواهد شد بکار می‌رود.

۳.۳ تفاضلات معین

فرض کنیم یک جدول از نقاط (x_i, y_i)، $i = ۰, ۱, ۲, ..., n$ یک تابع $y = f(x)$ داده شده است، قیمت‌های x دارای فواصل مساوی می‌باشد. یعنی $x_i = x_۰ + ih$، $i = ۰, ۱, ۲, ..., n$. فرض کنیم به قیمت $f(x)$ برای بعضی قیمت‌های x غیر از x_i ضرورت داریم، یا به مشتق تابع $f(x)$ برای برخی قیمت‌های x در انتروال $(x_۰, x_n)$ ضرورت داریم. روش‌های حل این مسائل مبتنی بر مفهوم «تفاضلات[1]» یک تابع

[1] Differences

می‌باشد که ذیلاً تعریف می‌شود.

۱.۳.۳ تفاضلات پیشین

فرض کنیم $y_۰$، $y_۱$، $y_۲$، ...، y_n یک ست از قیمت‌های y را نشان می‌دهد، پس $y_۱ - y_۰$، $y_۲ - y_۱$،...، $y_n - y_{n-۱}$ بنام *تفاضلات* y یاد می‌شود. این تفاضلات را به ترتیب به $\Delta y_۰$، $\Delta y_۱$، ...، $\Delta y_{n-۱}$ نشان می‌دهیم، یعنی

$$\Delta y_۰ = y_۱ - y_۰,\ \Delta y_۱ = y_۲ - y_۱, ...,\ \Delta y_{n-۱} = y_n - y_{n-۱}.$$

طوریکه Δ بنام *اوپراتور تفاضل پیشین*[1] و $\Delta y_۰$، $\Delta y_۱$، ...،$\Delta y_{n-۱}$ بنام *تفاضلات اول پیشین* یاد می‌شود. تفاوت میان دو تفاضلات اول متوالی پیشین بنام *تفاضلات دوم پیشین* یاد شده و با $\Delta^۲ y_۰$، $\Delta^۲ y_۱$، ...، و غیره نمایش داده می‌شود. با روش مشابه میتوان *تفاضلات پیشین سوم*، *چهارم* و ... را نیز تعریف نماییم. بنابرین

$$\begin{aligned}
\Delta^۲ y_۰ &= \Delta y_۱ - \Delta y_۰ = y_۲ - y_۱ - (y_۱ - y_۰) = y_۲ - ۲y_۱ + y_۰,\\
\Delta^۳ y_۰ &= \Delta^۲ y_۱ - \Delta^۲ y_۰ = y_۳ - ۳y_۲ + ۳y_۱ - y_۰,\\
\Delta^۴ y_۰ &= \Delta^۳ y_۱ - \Delta^۳ y_۰ = y_۴ - ۴y_۳ + ۶y_۲ - ۴y_۱ + y_۰.
\end{aligned}$$

در نتیجه واضح است که هر تفاضل مرتبه‌ـ بلندتر به آسانی با y ها قابل ارایه می‌باشد، چون ضرایب طرف راست ضرایب بینوم می‌باشند. جدول ۱.۳ چگونگی تشکیل تفاضلات پیشین تمام مرتبه‌ها را نشان می‌دهد. در محاسبات عملی، جدول تفاضل پیشین قرار ذیل تشکیل شده می‌تواند: برای نقاط (x_i, y_i)، $i = ۰, ۱, ۲, ..., n$ و $x_i = x_۰ + ih$ داریم:

$$\Delta y_j = y_{j+۱} - y_i, \quad j = ۰, ۱, ..., n - ۱.$$

هرگاه y_j را به $DEL(۰, j)$ نشان دهیم، معادله بالا را قرار ذیل نوشته می‌توانیم:

$$\Delta y_j = DEL(۰, j + ۱) - DEL(۰, j) = DEL(۱, j).$$

در نتیجه

$$\Delta^i y_j = DEL(i - ۱, j + ۱) - DEL(i - ۱, j),$$

که تفاضل i ـام پیشین y_j می‌باشد. برای نقاط

$$(x_i, y_i), \quad i = ۰, ۱, ۲, ..., ۶$$

جدول تفاضل ۲.۳ را تشکیل میدهیم.

---
[1]Forward Difference Operator

جدول ۱.۳: جدول تفاضل پیشین.

x	y	Δ	$\Delta^{۲}$	$\Delta^{۳}$	$\Delta^{۴}$	$\Delta^{۵}$	$\Delta^{۶}$
$x_{۰}$	$y_{۰}$						
		$\Delta y_{۰}$					
$x_{۱}$	$y_{۱}$		$\Delta^{۲} y_{۰}$				
		$\Delta y_{۱}$		$\Delta^{۳} y_{۰}$			
$x_{۲}$	$y_{۲}$		$\Delta^{۲} y_{۱}$		$\Delta^{۴} y_{۰}$		
		$\Delta y_{۲}$		$\Delta^{۳} y_{۱}$		$\Delta^{۵} y_{۰}$	
$x_{۳}$	$y_{۳}$		$\Delta^{۲} y_{۲}$		$\Delta^{۴} y_{۱}$		$\Delta^{۶} y_{۰}$
		$\Delta y_{۳}$		$\Delta^{۳} y_{۲}$		$\Delta^{۵} y_{۱}$	
$x_{۴}$	$y_{۴}$		$\Delta^{۲} y_{۳}$		$\Delta^{۴} y_{۲}$		
		$\Delta y_{۴}$		$\Delta^{۳} y_{۳}$			
$x_{۵}$	$y_{۵}$		$\Delta^{۲} y_{۴}$				
		$\Delta y_{۵}$					
$x_{۶}$	$y_{۶}$						

جدول ۲.۳: جدول تفاضل پیشین

x	y	Δ	$\Delta^{۲}$	$\Delta^{۳}$	$\Delta^{۴}$	$\Delta^{۵}$	$\Delta^{۶}$
$x_{۰}$	$DEL(۰,۰)$						
		$DEL(۱,۰)$					
$x_{۱}$	$DEL(۰,۱)$		$DEL(۲,۰)$				
		$DEL(۱,۱)$		$DEL(۳,۰)$			
$x_{۲}$	$DEL(۰,۲)$		$DEL(۲,۱)$		$DEL(۴,۰)$		
		$DEL(۱,۲)$		$DEL(۳,۱)$		$DEL(۵,۰)$	
$x_{۳}$	$DEL(۰,۳)$		$DEL(۲,۲)$		$DEL(۴,۱)$		$DEL(۶,۰)$
		$DEL(۱,۳)$		$DEL(۳,۲)$		$DEL(۵,۱)$	
$x_{۴}$	$DEL(۰,۴)$		$DEL(۲,۳)$		$DEL(۴,۲)$		
		$DEL(۱,۴)$		$DEL(۳,۳)$			
$x_{۵}$	$DEL(۰,۵)$		$DEL(۲,۴)$				
		$DEL(۱,۵)$					
$x_{۶}$	$DEL(۰,۶)$						

در جدول ۲.۳

$$
\begin{aligned}
DEL(۴,۰) &= DEL(۳,۱) - DEL(۳,۰) \\
&= DEL(۲,۲) - DEL(۲,۱) - [DEL(۲,۱) - DEL(۲,۰)] \\
&= DEL(۱,۳) - DEL(۱,۲) - ۲[DEL(۱,۲) - DEL(۱,۱)] \\
&+ DEL(۱,۱) - DEL(۱,۰) \\
&= DEL(۰,۴) - DEL(۰,۳) - ۳[DEL(۰,۳) - DEL(۰,۲)] \\
&+ ۳[DEL(۰,۲) - DEL(۰,۱)] - [DEL(۰,۱) - DEL(۰,۰)] \\
&= DEL(۰,۴) - ۴DEL(۰,۳) + ۶DEL(۰,۲) \\
&- ۴DEL(۰,۱) + DEL(۰,۰) \\
&= y_{۴} - ۴y_{۳} + ۶y_{۲} - ۴y_{۱} + y_{۰},
\end{aligned}
$$

می باشد. حال جدول تفاضل پیشین را با استفاده از جملات ساده تشکیل نموده می‌توانیم.

Do $i = ۱(۱)n$
Do $j = ۱(۱)n - i$
DEL (i, j) =DEL $(i - ۱, j + ۱)$−DEL $(i - ۱, j)$
NEXT j
NEXT i
End

۲.۳.۳ تفاضل پسین

تفاضلات $y_۱ - y_۰$، $y_۲ - y_۱$، ...، $y_n - y_{n-۱}$ بنام *تفاضلات اول پسین* یاد می‌شود، که به ترتیب به $\nabla y_۱$، $\nabla y_۲$، ...، ∇y_n نمایش داده می‌شود. یعنی

$$\nabla y_۱ = y_۱ - y_۰, \nabla y_۲ = y_۲ - y_۱, ..., \nabla y_n = y_n - y_{n-۱}$$

در فوق ∇ بنام *اوپراتور تفاضل پسین*[1] یاد می‌شود. و با روش مشابه تفاضلات مراتب بلندتر پسین را می‌توان تعریف نمود. بنابرین داریم:

[1] Backward Difference Operator