

به نام خدایی که در همین نزدیکی ست

تقدیم بہ عزیزانم

سپاسگزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

بر خود واجب می‌دانم از استاد فرزانه جناب آقای دکتر مهدی قیاسوند که به عنوان استاد راهنما در مراحل مختلف این پایان‌نامه همواره با سعه صدر و گشاده‌رویی در کنار من بودند و در طول مدت تحصیل از راهنمایی‌های اخلاقی و علمی ایشان بهره‌جسته‌ام تشکر و قدردانی نمایم. از اساتید محترم گروه ریاضی به خاطر بیان نکات ارزنده، راهنمایی و دلگرمی در طول تحصیل کمال تشکر را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر و همسر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را که بهترین پشتیبان من بودند.

وحد محمّتی
تهران-ایران

فهرست مطالب

۳	۱ مفاهیم و تعاریف مقدماتی
۵	۲ مفاهیم و تعاریف مقدماتی
۵	۱.۲ مفاهیم اولیه گراف
۸	۲.۲ میدان
۸	۳.۲ مدل شبکه و تعاریف
۱۱	۴.۲ حداقل برش
۱۲	واژه نامه انگلیسی به فارسی
۱۴	واژه نامه فارسی به انگلیسی

فصل اول

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

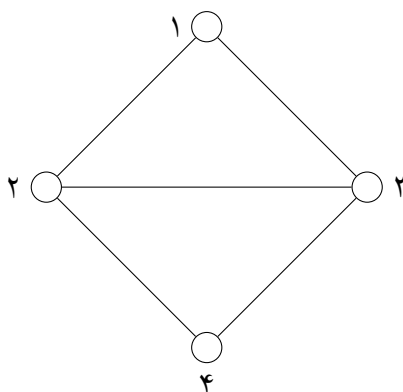
فصل دوم

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

به منظور درک بهتر موضوعات بیان شده در این پایان‌نامه، تعاریف و مفاهیمی مورد نیاز است که در این بخش به ذکر آن‌ها می‌پردازیم.

۱.۲ مفاهیم اولیه گراف

تعریف ۱.۱.۲. (گراف^۱). گراف را توسط $G = (V, E)$ تعریف می‌کنیم که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است و هریک از اعضای آن را یک رأس یا گره^۲ می‌نامیم و مجموعه‌ی گره‌ها در گراف G را با $V(G)$ نیز نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی E زیرمجموعه‌ای از تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V می‌باشد. اعضای E را یال‌های^۳ G نامیده و مجموعه‌ی یال‌های G را با $E(G)$ نیز نمایش می‌دهیم. شکل ۱.۲ نمونه‌ای از یک گراف را نمایش می‌دهد.



شکل ۱.۲: نمونه‌ای از یک گراف.

^۱Graph
^۲Node

^۳Edge

تعریف ۲.۱.۲. (زیرگراف^۴) گراف $G' = (V', E')$ را یک زیرگراف از گراف $G = (V, E)$ می‌نامیم هرگاه $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$ باشد.

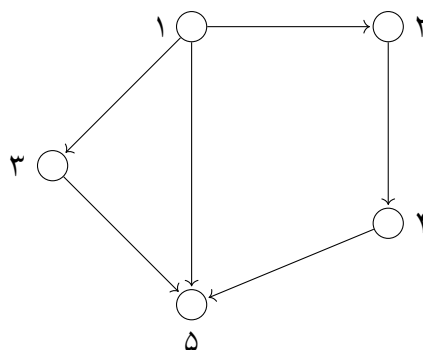
تعریف ۳.۱.۲. (یال جهت‌دار) یک یال جهت‌دار e بین گره‌های v_i و v_j به صورت $(v_i \rightarrow v_j)$ نشان داده می‌شود که v_i انتها^۵ و v_j ابتدا^۶ آن است و آن را به فرم $tail(e) = v_i$ و $head(e) = v_j$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۲. (مسیر) یک مسیر بین دو گره v_i و v_j به صورت دنباله‌ای از یال‌ها مانند $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ است به طوری که ابتدای یال e_1 گره v_i و انتهای یال e_k گره v_j است و انتهای هر یال ابتدای یال بعدی است به عبارت دیگر $head(e_i) = tail(e_{i+1})$ برای $i = 1, 2, \dots, k-1$.

تعریف ۵.۱.۲. (مسیر یال مجزا) مسیرهایی می‌باشند که هیچ یال مشترکی با هم ندارند. به طور مشابه مسیرهای رأس مجزا مسیرهایی هستند که هیچ رأس مشترکی ندارند.

تعریف ۶.۱.۲. (گراف جهت‌دار^۷) گراف جهت‌دار را توسط $G = (V, E)$ تعریف می‌کنیم که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است و E زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی زوج‌های مرتب متشکل از اعضای V است. در واقع در گراف جهت‌دار، هر یک از یال‌ها یال جهت‌دار هستند. شکل ۲.۲ یک گراف جهت‌دار را نمایش می‌دهد که در این گراف مجموعه‌های V و E عبارتند از:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 4), (3, 5), (4, 5)\}.$$



شکل ۲.۲: گراف جهت‌دار.

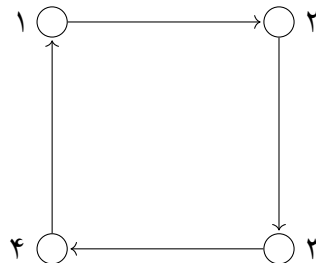
^۴Subgraph

^۵Tail

^۶Head

^۷Directed Graph

تعریف ۷.۱.۲. (دور^۸) یک دور از گراف G یک مسیر مانند v_1, v_2, \dots, v_m با شرط $m \geq 3$ می باشد اگر $v_1 = v_m$ باشد. همچنین می توان دور را به صورت مسیر $v_1, v_2, \dots, v_m, v_1$ نیز معرفی کرد. شکل ۳.۲ نمونه ای از یک دور را نشان می دهد.

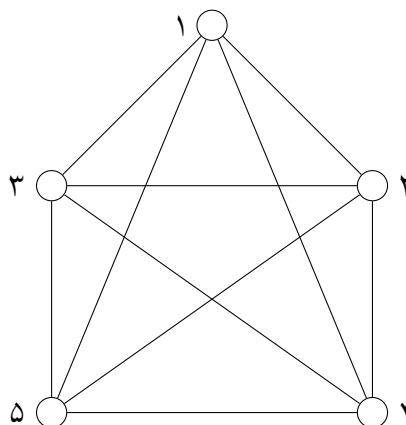


شکل ۳.۲: نمونه ای از یک دور در گراف.

تعریف ۸.۱.۲. (گراف ساده^۹) به یک گراف، ساده گفته می شود اگر دور و یال های چند گانه بین دو گره خود نداشته باشد.

تعریف ۹.۱.۲. (گراف همبند^{۱۰}) گراف G را همبند گوئیم هرگاه به ازای هر جفت گره i و j از گراف G حداقل یک مسیر وجود داشته باشد؛ در غیر این صورت گراف را ناهمبند می نامیم.

تعریف ۱۰.۱.۲. (گراف کامل^{۱۱}) گراف کامل گراف ساده ای است که در آن هر رأس به تمامی رأس های دیگر به وسیله ی یک یال متصل است. معمولاً گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می دهند. شکل ۴.۲ نمونه ای از یک گراف K_5 است.



شکل ۴.۲: نمونه ای از یک گراف کامل.

⁸Cycle
⁹Simple Graph

¹⁰Connected Graph
¹¹Complete Graph

۲.۲ میدان

تعریف ۱.۲.۲. میدان F ، مجموعه‌ای ناتهی از عناصر، با دو عمل $+$ و \cdot است که برای هر $a, b, c \in F$ در اصول زیر صادق‌اند:

۱. F تحت عمل $+$ و \cdot بسته است؛ یعنی، $a + b$ و $a \cdot b$ در F هستند.

۲. قوانین جابه‌جایی:

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{و} \quad a + b = b + a.$$

۳. قوانین شرکت پذیری:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \text{و} \quad (a + b) + c = a + (b + c).$$

۴. قوانین پخش پذیری:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

علاوه بر این، باید دو عضو همانی مجزای 0 و 1 (که به ترتیب، همانی‌های جمع و ضرب نامیده می‌شوند) در F موود باشند که در شرایط زیر صادق‌اند:

$$5. \text{ برای هر } a \in F, a + 0 = a.$$

$$6. \text{ برای هر } a \in F, a \cdot 1 = a \text{ و } a \cdot 0 = 0.$$

$$7. \text{ برای هر } a \in F, \text{ عضو وارون جمعی } (-a) \text{ در } F \text{ موجود است که } a + (-a) = 0.$$

$$8. \text{ برای هر } a \neq 0 \text{ در } F, \text{ عضو وارون ضربی } a^{-1} \text{ در } F \text{ موجود است که } a \cdot a^{-1} = 1.$$

۳.۲ مدل شبکه و تعاریف

یک گراف فاقد دور جهت‌دار^{۱۲} $G = (V, E)$ که V مجموعه گره‌ها و $E \in V \times V \times \mathbb{Z}_+$ یال‌های نشان دهنده‌ی مسیرهای ارتباطی بدون تأخیر^{۱۳} بین آنهاست را در نظر می‌گیریم. زیرمجموعه‌ی $S \subset V$ نشان

¹²Directed Acyclic Graph¹³Delay Free

دهنده‌ی گره‌های منبع و $T \subset V$ نشان دهنده‌ی گره‌های مقصد است. گره‌های مبدأ یال ورودی و گره‌های مقصد یال خروجی ندارند. هر منبع $s_i \in S$ یک فرایند تصادفی مستقل X_i تولید می‌کند، به گونه‌ای که دنباله متغیرهای تصادفی X_{i_1}, X_{i_2}, \dots در زمان مستقل و یکنواخت وارد شده‌اند، هر X_{ij} مقداری را دریافت می‌کند که به طور یکنواخت بر روی یک الفبای متناهی A توزیع می‌شوند که فرض می‌شود یک میدان متناهی است به طوری که $|A| = q$. هر یال از ظرفیت واحد برخوردار است و می‌تواند یک علامت را از A در هر واحد زمان منتقل کند. مدل ما امکان یال‌های چندگانه^{۱۴} بین گره‌ها را فراهم می‌کند. در این حالت یال‌ها یک شاخص اضافی دارند. به عنوان مثال اگر بین گره‌های u و v دو یال وجود داشته باشد، آنها به صورت $(u, v, 1)$ و $(u, v, 2)$ نمایش داده می‌شوند. ظرفیت یال (u, v) به عنوان تعداد یال‌های بین u و v تعریف می‌شود. از نماد $In(v)$ برای نمایش مجموعه یال‌های ورودی گره $v \in V$ استفاده می‌کنیم. اگر v یک گره در گراف غیر جهت‌دار باشد، آنگاه $In(v)$ نشان دهنده‌ی یال‌های متصل به v خواهد بود. یک کد شبکه عبارت است از اختصاص تابع‌های یال^{۱۵} به هر یال در E و یک تابع رمزگشایی^{۱۶} به هر مقصد در T است. تابع یال برای یک یال متصل به منبع، فقط به مقادیر منبع بستگی دارد. به همین ترتیب تابع یال برای یالی که به یک منبع وصل نشده باشد بستگی به مقادیر دریافت شده از یال‌های ورودی آن دارد و عملکرد رمزگشایی برای یک مقصد فقط به یال‌های ورودی آن بستگی دارد. فرض کنیم پیام‌های منبع بردارهای طول r و توابع یال بردارهای طول l باشند. تابع‌های رمزگشایی باید به گونه‌ای باشند که هر مقصد مجموع تمام بردارهای پیام منبع را بازیابی کند. دامنه و برد توابع رمزگذاری به شرح زیر خلاصه می‌شود. تابع یال برای یال e :

$$\begin{aligned} \phi_e: \mathcal{A}^r &\longrightarrow \mathcal{A}^l, & \text{اگر } tail(e) \in S \\ \phi_e: \mathcal{A}^{l|In(tail(e))} &\longrightarrow \mathcal{A}^l, & \text{اگر } tail(e) \notin S \end{aligned}$$

تابع رمزگشایی برای مقصد $t_i \in T$:

$$\psi_{t_i}: \mathcal{A}^{l|In(t_i)} \longrightarrow \mathcal{A}^r.$$

¹⁴Multiple¹⁵Edge Function¹⁶Decoding Function

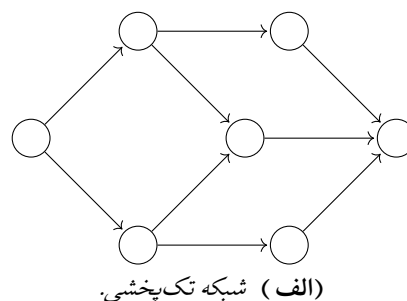
اگر تمام توابع یال و توابع رمزگشایی خطی باشند، کدشبهه یک کدشبهه خطی است. برای شبکه‌های مجموع، یک راه حل کدشبهه کسری (r, l) نسبت به A به گونه‌ای است که می‌توان مجموع نمادهای منبع r (بر روی قسمت متناهی) را در واحدهای l زمان به کلیه مقصدها انتقال داد. نرخ این کدشبهه $\frac{r}{l}$ تعریف شده است. اگر یک شبکه (r, r) راه حل کدگذاری شبکه برای برخی $r \geq 1$ داشته باشد گفته می‌شود که شبکه قابل حل است. اگر شبکه دارای $(1, 1)$ راه حل باشد گفته می‌شود که شبکه راه حل اسکالر دارد. سوپریمم^{۱۷} کلیه نسبت‌های دستیابی ظرفیت شبکه نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۳.۲. (ظرفیت^{۱۸} یال) در شبکه‌ها عددی به یال‌ها نسبت داده می‌شود که آن را ظرفیت یال می‌گوییم و به معنای حداکثر جریانی است که می‌توان روی آن یال ارسال کرد.

تعریف ۲.۳.۲. (گره‌های منبع^{۱۹} و مقصد^{۲۰}) منظور از گره منبع در یک شبکه گره‌ای است که سیگنال‌هایی در آن تولید می‌شود و این سیگنال‌ها باید به گره‌های متقاضی ارسال شوند. گره‌هایی که می‌خواهیم سیگنال‌های مورد نیاز آنها را ارسال کنیم گره مقصد نامیده می‌شوند.

تعریف ۳.۳.۲. (ظرفیت شبکه) ظرفیت یک شبکه حداکثر تعداد واحدهایی است که می‌توان از گره منبع s به مجموعه گره‌های مقصد T ارسال کرد.

تعریف ۴.۳.۲. (شبکه تک‌پخشی^{۲۱} و چندپخشی^{۲۲}) در شبکه‌های تک‌پخشی اطلاعات خروجی از یک گره مانند گره مبدأ s هر بار فقط به یک گره متقاضی ارسال می‌شود. شبکه‌های چندپخشی در مقابل شبکه‌های تک‌پخشی قرار دارند به این صورت که اطلاعات خروجی از یک گره به چندین گره ارسال می‌گردد. نمودار مربوط به این نوع شبکه‌ها در شکل ۵.۲ نشان داده شده است.



شکل ۵.۲: شبکه‌های تک‌پخشی و چندپخشی.

¹⁷Supremum

¹⁸Capacity

¹⁹Source

²⁰Terminal

²¹Unicasting

²²Multicasting

تعریف ۵.۳.۲. (یال گلوگاه^{۲۳}) به یالی در شبکه که اطلاعات خروجی از منبع برای رسیدن به مقصد باید از این یال گذر کنند یال گلوگاه گفته می شود.

۴.۲ حداقل برش

تعریف ۱.۴.۲. یک برش بین گره منبع s و یک گره مانند t ، یک زیرمجموعه V' از V است به طوری که $s \in V'$ و $t \notin V'$. مجموعه یال های برش V' به صورت زیر تعریف می شوند:

$$E_{V'} = \{e \in E : e \in Out(s) \cap In(t), \text{ for } s \in V', t \notin V'\}.$$

همچنین ظرفیت برش V' برابر با $\sum_{e \in E_{V'}} R_e$ است که R نشان دهنده ظرفیت هر یال می باشد.

تعریف ۲.۴.۲. یک برش مانند V' ، حداقل برش بین منبع s و گره t نامیده می شود هرگاه کم ترین ظرفیت را در بین همه برش ها از s به t داشته باشد.

²³Bottleneck Edge

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

D

Directed Acyclic Network شبکه فاقد دور جهت‌دار

E

Error Free بدون خطا

F

Function Coputation تابع محاسبه

N

Network Coding کدگذاری شبکه

S

.....

T

.....

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ب

Error Free بدون خطا

ت

Function Coputation تابع محاسبه

ش

Directed Acyclic Network شبکه فاقد دور جهت‌دار

ک

Network Coding کدگذاری شبکه

گ

.....

.....