

**تعریف ۱.۰.** هیچ جا چگال: زیر مجموعه  $A$  در فضای توپولوژی  $X$  را هیچ جا چگال گوئیم هر گاه درون بستار آن تهی باشد.

**تعریف ۲.۰.** فضای  $X$  را بئر خوانیم هرگاه برای هرگرایه شمارا از مجموعه های بسته  $X$  مانند  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  که هریک در  $X$  درون تهی باشد، اجتماع آنها یعنی  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  نیز در  $X$  درون تهی باشد. یا فضای توپولوژی  $X$  را یک فضای بئر نامیم هرگاه هر اشتراک شمارش پذیر از زیر مجموعه های باز و چگال در آن، چگال باشد یا به طور معادل هر زیر مجموعه باز ناتهی از آن به صورت اجتماع شمارش پذیر از مجموعه های هیچ جا چگال نباشد.

فضاهای متریک و فضاهای هاسدورف موضعا فشرده فضای بئر هستند.

**تعریف ۳.۰.** خط سورجنفری<sup>۱</sup>: فرض کنید  $\mathcal{T}$  یک توپولوژی روی  $\mathbb{R}$  با پایه  $\mathcal{B}$  شامل مجموعه های

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

باشد به طوریکه  $a, b \in \mathbb{R}$  و  $a < b$ . با این توپولوژی که جمع طبیعی در نقش ضرب باشد،  $\mathbb{R}$  یک گروه پاراتوپولوژیک و لذا یک نیم گروه توپولوژیک است.

اما  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  یک گروه توپولوژیک نیست زیرا عمل

$$x \longrightarrow -x$$

ناپیوسته است. (اثبات در بخش خط سورجنفری) این گروه پاراتوپولوژیک خط سورجنفری نامیده می شود یا به بیان دیگر یک توپولوژی غیر استاندارد روی خط حقیقی  $\mathbb{R}$  است و توپولوژی است که با پایه زیر روی نیم بازه تعریف می شود.

$$B = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

**تعریف ۴.۰.** فضاهای متریک: منظور از متریک<sup>۲</sup> روی یک مجموعه  $X$  عبارت است از تابع

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

که در شرایط زیر صدق می کند:

(۱) (مثبت معینی)  $d(x, y) \geq 0$  برای هر  $x, y \in X$  و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر

**تعریف ۶.۰.** فضای توپولوژی  $X$ ، متقارن پذیر<sup>۱</sup> است اگر یک شبه متری (متریک به جز نامساوی مثلثی)  $d$  روی  $X$  موجود باشد به طوریکه یک زیر مجموعه  $U$  از  $X$  در فضای  $X$  باز است اگر و فقط اگر برای هر  $x \in U$  یک عدد حقیقی مثبت  $\epsilon$  موجود باشد که  $B(x, \epsilon) \subset U$  که در آن

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X | d(x, y) < \epsilon\}$$

**تعریف ۷.۰.** فضای تیخونوف  $X$  فشرده چنخ<sup>۲</sup> است اگر  $X$  با یک مجموعه ای  $G_\delta$  در یک فضای فشرده همسانریخت باشد.

**تعریف ۸.۰.** نگاشت پیوسته  $f : X \rightarrow Y$  کامل است اگر  $X$  فضای هاسدورف، و  $f$  نگاشت بسته باشد و تمام  $f^{-1}(\{y\})$  ها زیر مجموعه فشرده از  $X$  باشند. نگاشت یک به یک  $f : X \rightarrow Y$  روی فضای هاسدورف  $X$  کامل است اگر و فقط اگر نگاشت بسته باشد. هر نگاشت پیوسته از فضای فشرده به فضای هاسدورف نگاشتی کامل است. (۷-۳) [؟؟].

**تعریف ۹.۰.** زیر مجموعه  $E$  از فضای توپولوژیک  $X$  را از رسته اول<sup>۳</sup> گوئیم اگر  $E$  را بتوان به صورت اجتماعی شمارا از زیر مجموعه های هیچ جا چگال  $X$  نوشت. مجموعه هایی که از رسته اول نباشند، را از رسته دوم<sup>۴</sup> گوئیم.

<sup>۱</sup>symmetrizable

<sup>۲</sup> $\hat{C}ech - complete$

<sup>۳</sup>first category

<sup>۴</sup>second category