فصل ۱
نتایج اصلی

۱.۰.۱ قضیه. فرض کنیم S باقیمانده فوق حلپذیر یک گروه حلپذیر مانند G باشد, ونیز فرض می‌کنیم زیرگروه فیتینگ $F(S)$ آبلی باشد. در این صورت G یک $MANL$ گروه است.

برهان. برای اثبات این که G یک $MANL$ گروه است, یک زیرگروه نرمال آبلی ماکسیمال دلخواه A از G را در نظر گرفته و نشان می‌دهیم $A = C_G(A)$. فرض می‌کنیم چنان نباشد, یعنی داشته باشیم $A < A = C_G(A)$ و تلاش می‌کنیم به یک تناقض برسیم.

فرض می‌کنیم $\frac{K}{A}$ یک عامل اصلی G باشد, که برای آن $K \subset C_G(A)$, وملاحظه می‌کنیم که بخاطر ماکسیمال بودن A , K آبلی نیست. از آنجا که G گروهی حلپذیر است, عامل اصلی $\frac{K}{A}$ آبلی است, و چون $A \subset Z(K)$ مشاهده می‌کنیم K پوچتوان است, و لذا $S \cap K$ یک زیرگروه پوچتوان نرمال S می‌باشد. بنابراین $S \cap K \subset F(S)$, و چون فرض کرده ایم $F(S)$ آبلی است, نتیجه می‌گیریم $S \cap K$ نیز آبلی است.

فرض می‌کنیم $S \cap K \nsubseteq A$. در این صورت $A < A(S \cap K) \subset K$ و چون $\frac{K}{A}$ یک عامل اصلی G می‌باشد و $A(S \cap K)$ در G نرمال است, مشاهده می‌کنیم $A(S \cap K) = K$. حال $A \subset Z(K)$ و $S \cap K$ آبلی است, بنابراین $K = A(S \cap K)$ آبلی است. این یک تناقض است, و از این رو نتیجه می‌شود $S \cap K \subset A$.

اینک $\dfrac{K}{S \cap K}$ با $\dfrac{KS}{S}$ یکریخت است, و تحت این یکریختی, زیرگروه $\dfrac{A}{S \cap K}$ متناظر است با $\dfrac{AS}{S}$. بنابراین یک یکریختی طبیعی از $\dfrac{K}{A}$ به $\dfrac{KS}{AS}$ وجود دارد, و این یکریختی با عمل های تزویج G روی این دو گروه سازگار است. (به عبارت دیگر, $\dfrac{K}{A}$ و $\dfrac{KS}{AS}$ به عنوان گروههای Gـعملگر یکریخت هستند). چون $\frac{K}{A}$ یک عامل اصلیG است, نتیجه می‌شود که $\dfrac{KS}{AS}$ نیز یک عامل اصلیG است, در این صورت $\dfrac{KS}{AS}$ دوری است, و نتیجه می‌گیریم که K آبلی است, چرا که $A \subset Z(G)$. این آخرین تناقض ما می‌باشد. $\square$

۲.۰.۱ قضیه. برای گروه متناهی دلخواه G، یک گروه $MANL$ متناهی چون W وجود دارد به طوری که G با زیرگروهی از W یکریخت می‌باشد و همچنین با زیرگروهی از W یکریخت می‌باشد و همچنین با یک گروه خارج قسمتی از W. در حقیقت می‌توانیم W را حاصلضرب نیم مستقیم یک p- گروه آبلی مقدماتی مانند B توسط G (که روی آن عمل می‌کند) بگیریم, در اینجا p عدد اول دلخواهی است که مرتبه زیرگروه فیتینگ $F(G)$ را نمی‌شمارد.

برهان. گروه متناهی دلخواه G را مفروض انگاشته, و G را به عنوان یک گروه جایگشتی صادق روی مجموعه ای مانند Ω در نظر می‌گیریم. (برای مثال, می‌توانیم Ω را خود G بگیریم, و فرض کنیم G روی خودش با ضرب از راست عمل می‌کند.) عدد اول p که $|F(G)|$ را عاد نمی‌کند انتخاب نموده و U را یک گروه دوری مرتبه p می‌انگاریم. قرار می‌دهیم $B = \tilde{U}$, لذا B گروه

متشکل از تمام توابع از ω به توی U می‌باشد, و B گروه پایه حاصلضرب حلقوی $W = U \wr G$ است. اکنون W حاصلضرب نیم مستقیم p− گروه آبلی مقدماتی B توسط G است که روی آن عمل می‌کند. بخصوص, G هم یک زیرگروه و هم یک نقش همریختی W است, و تنها کافی است نشان دهیم W یک $MANL$ گروه است. داریم $W = BG$ و $C_G(B) = ۱$. با قرار دادن $C = C_W(B)$ داریم $B \subset C$ و لذا $C = B(G \cap C) = B$ بنابراین B در W خودمرکزساز است, و بخصوص, B یک زیرگروه نرمل آبلی ماکسیمال W است. سرانجام, برای اثبات اینکه W یک $MANL$ گروه است, کافی است نشان دهیم B زیرگروه نرمال آبلی ماکسیمال یکتای W است. به طور هم ارز, نشان می‌دهیم که اگر $A \lhd W$ که A است, آنگاه $A \subset B$. ملاحظه می‌کنیم $\dfrac{BA}{B} \cong \dfrac{A}{A \cap B}$, و این یک زیرگروه نرمال آبلی $G \cong \dfrac{W}{B}$ است. در این صورت $|A : A \cap B|$, $|F(G)|$ را می‌شمارد, بنابراین p , $|A : A \cap B|$ را نمی‌شمارد, و لذا $A \cap B$ یک p− زیرگروه سیلوی A است.چون A آبلی است, می‌توان نوشت $A = (A \cap B)XQ$ که در آن Q, p'− گروه هال A است, اکنون $Q \lhd W$, زیرا به موجب فرض $A \lhd W$. از آنجا که B یک p−گروه است, داریم $Q \cap B = ۱$, و لذا $Q \subset C_W(B) = B$. این ایجاب می‌کند $Q = ۱$ و نتیجه می‌گیریم $A = A \cap B \subset B$, آنچه مطلوب بود. $\square$

مراجع

[1] K. Doerk and T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, Walter de Guyter, New York, 1992. [[۲]] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, Berlin, 1967. [[۳]] I. M. Isaacs, *Character Theory of Finite Groups*, AMS Chelsea, Providence, 2006. (Corrected reprint of the 1976 original.) [[۴]] I. M. Isaacs, *Finite Group Theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008. [[۵]] A. Yu. Olshanski, Groups of bounded period with subgroups of prime order, *Algebra i Logika*, 21 (1982), 553–618.

فهرست نمادها

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی آ

ا

ب

پ

ت

ث

ج

چ

ح

خ

د

ذ

ر

ز

ژ

س

ش

ص

ض

ط

ظ

ع

غ

ف
ق
ک
گ
ل
م
ن
و
هـ
ی

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

A
B
c
D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
U
V
W

X
Y
Z

نمایه

Abstract

In this thesis, we study the family of finite groups with the property that every maximal abelian normal subgroup is self-centralizing. It is well known that this family contains all finite supersolvable groups, but it also contains many other groups. In fact, every finite group G is a subgroup of some member Γ of this family, and we show that if G is solvable, then Γ can be chosen so that every abelian normal subgroup of G is contained in some self-centralizing abelian normal subgroup of Γ.

Keywords: Self-centralizing, Supersolvable residual, Wreath product, Abelian normal subgroup

2010 Mathematics Subject Classification: 20D10, 20D99.

K. N. Toosi University of Technology
Faculty of Mathematics

Master Thesis
Field

Title:

Large abelian normal subgroups

By:

Narges Kian

Supervisor:

Prof. AR. Moghadamfar

September 2016