فهرست مطالب

بسم اللہ الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد ریاضی

بردارهای فروبنیوس و سری هیلبرت وابسته به نیمگروه های به هم چسبیده

استاد راهنما

دکتر فرهاد رحمتی

نگارش

نغمه توسلی بنابی

مهر ماه ۱۳۹۴

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

رساله کارشناسی ارشد

بردارهای فروبنیوس و سری هیلبرت وابسته به نیمگروه های به هم چسبیده

نگارش: نغمه توسلی بنابی

استاد راهنما: دکتر فرهاد رحمتی — امضاء:

استاد ممتحن داخلی: — امضاء:

استاد ممتحن خارجی: — امضاء:

تشکر و قدردانی:

چکیده:

فرض کنیم $S_۱$ و $S_۲$ دو نیمگروه آفین و S نیمگروه چسبیده ی آنها باشد. برخی ناورداهای S مربوط به $S_۱$ و $S_۲$ هستند و باتوجه به مقادیر آنها در $S_۱$ و $S_۲$ قابل محاسبه است.در این پایان نامه برخی از مهمترین خواصی را که تحت چسباندن دو نیمگروه حفظ میشوند مرور میکنیم و به بررسی بردار فروبنیوس و سری هیلبرت نیمگروه های به هم چسبیده و نیز کاربردهای نیمگروه های آفین اشتراک کامل میپردازیم.

کلمات کلیدی

نیمگروه آفین–بردار فروبنیوس–سری هیلبرت–نیمگروه چسبیده

مقدمه وتاریخچه

مقدمه وتاریخچه:

مجموعه ی S را به همراه عمل دوتایی $+$ نیمگروه آفین گوییم هرگاه برای برخی $m \in \mathbb{Z}$ ؛ S زیرتکوار باتولید متناهی $\mathbb{Z}^m$ باشد.

اگر نیمگروه آفین $(-S)$ را تشکیل دهیم و داشته باشیم $S \cap (-S) = \{۰\}$ دراینصورت S را کاهش یافته می نامیم.

به سادگی میتوان نشان داد که نیمگروه آفین کاهش یافته ی S دارای یک دستگاه مولد مینیمال منحصر به فرد است.تعداد اعضای دستگاه مینیمال S را بعد نشاننده ی S می نامیم.

توجه کنیم که هر نیمگروه آفین کاهش یافته را برای برخی $m \in \mathbb{N}$ میتوان در $\mathbb{N}^m$ نشاند.

در این پایان نامه نیمگروه های آفین مورد نظر ما زیرتکوارهایی از $\mathbb{N}^m$ هستند.

فرض کنیم S یک نیمگروه آفین باشد گروه تولیدشده توسط آن را با $G(S)$ نمایش میدهیم و آن را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$G(S) = \{a - b \mid a, b \in S\}$$

فرض کنیم A دستگاه مولد مینیمال S و $A = A_۱ \cup A_۲$ یک افراز نابدیهی A و $S_i =$ تکوار تولیدشده توسط A_i برای $i \in \{۱, ۲\}$ باشد.دراینصورت $S = S_۱ + S_۲$.گوییم S نیمگروه چسبیده ی $S_۱$ و $S_۲$ توسط d است هرگاه داشته باشیم :

۱) $d \in S_۱ \cap S_۲$

۲) $d\mathbb{Z} \in G(S_۱) \cap G(S_۲)$

و آن را با $S = S_۱ +_d S_۲$ نشان میدهیم. برخی خواص $S_۱$ و $S_۲$ تحت چسباندن حفظ میشوند.

فرض کنیم $A = \{a_۱, \ldots, a_m\}$ دستگاه مولد مینیمال S باشد.همریختی تکواری $\varphi : \mathbb{N}^m \to S$ با ضابطه ی $\varphi(e_i) = a_i$ یک همریختی تکواری پوشاست.هسته ی این همریختی به صورت کلاس هم ارزی آن دسته از اعضای است که تحت همریختی دارای تصویر یکسان هستند که به صورت زیر تعریف میشود:

$$ker\varphi = \{(a,b) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^m \mid \varphi(a) = \varphi(b)\}$$

بنابراین S بعنوان یک تکوار با $\frac{\mathbb{N}^m}{ker\varphi}$ یکریخت است.
دستگاه مولد برای هسته ی همریختی فوق را یک نمایش برای S نامیم و آن را با ρ نشان میدهیم.
نمایش مینیمال S نمایشی است که هیچپک از زیرمجموعه های سره ی آن نمایشی برای S نباشند.
تمام نمایش های مینیمال S درصورت متناهی بودن ؛ دارای تعداد اعضای یکسان هستند.
فرض کنیم $S = S_1 +_d S_2$ و $S_i =$ با $i \in \{1,2\}$ و $A = A_1 \cup A_2$ افراز نابدیهی A باشند.بدون کاسته شدن از کلیت موضوع فرض کنیم $A_1 = \{a_1, \dots, a_l\}$ و $A_2 = \{a_{l+1}, \dots, a_m\}$

اگر ρ_1 و ρ_2 به ترتیب نمایش های مینیمال S_1 و S_2 باشند دراینصورت برای هر $(a,b) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^m$ نمایش مینیمال S به صورت زیر است:

$$\rho = \rho_1 \cup \rho_2 \cup \{(a,b)\}$$

توجه داریم که l مختصات اول b برابر با صفر و نیز $m - l$ مختصات باقی مانده از a برابر با صفر است.
عضو بتی نیمگروه آفین S را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$Betti(S) = \{s \in S \mid a,b \in \varphi^{-1}(s)\ ;\ (a,b) \in \rho\}$$

که در آن ρ نمایش مینیمالی از S است.
و اگر $S = S_1 +_d S_2$ داریم:

$$Betti(S_1 + S_2) = Betti(S_1) \cup Betti(S_2) \cup \{d\}$$

نیمگروه های آفینی را که تنها دارای یک عامل بتی هستند میتوان به عنوان چسبانده ی برخی کپی های نیمگروه های آفین با نمایش مینیمال تهی توسط d مشخص کرد و بنابراین برای برخی $t \in \mathbb{Z}_{>0}$ با $\mathbb{Z}^t$ یکریخت است.
نیمگروه آفین S را به طور یکتا نمایش داده شده گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$\forall \tau, \sigma \in \rho \quad \& \quad \forall (a,b) \in \sigma \to (a,b) \in \tau\ \vee\ (b,a) \in \tau.$$

که در آن ρ نمایش مینیمال S است.
بعبارت دیگر هرگاه یک نمایش مینیمال منحصربه فرد درحد تجدید آرایشی از زوج های نمایش مینیمال S وجود داشته باشد.
اگر $S = S_1 +_d S_2$ دراینصورت S را به طور یکتا نمایش داده شده گوییم اگر و تنها اگر S_1 و S_2 به طور یکتا نمایش داده شده باشند و داشته باشیم:

$$\forall a \in Betti(S_1) \cup Betti(S_2)\ ;\ \pm(d-a) \notin S_1 +_d S_2$$

فرض کنیم S نیمگروهی آفین ؛ ρ نمایش مینیمالی برای آن ؛ بعد نشاننده ی S برابر n و V فضای برداری تولید شده توسط آن باشد.داریم:

$|\rho| \geq n - dimV$

نیمگروه آفین S را اشتراک کامل گوییم هرگاه تعداد اعضای هرکدام از نمایش های مینیمال برابر با تفاضل بعد نشاننده ی S و بعد فضای برداری تولید شده توسط S باشد.
میتوان نشان داد که یک نیمگروه آفین اشتراک کامل است اگر و تنها اگر برای برخی $t \in \mathbb{Z}_{>0}$ با $\mathbb{N}^t$ یکریخت باشد.
یا
چسبانده ی دو نیمگروه آفین اشتراک کامل باشد.
نیمگروه عددی زیرتکواری از $\mathbb{N}$ است که دارای متمم متناهی در $\mathbb{N}$ باشد.
به سادگی میتوان دید که هر نیمگروه عددی با تولید متناهی است بنابراین هر نیمگروه عددی یک نیمگروه آفین است.
فرض کنیم S یک نیمگروه عددی باشد.بزرگترین عدد صحیحی که را که به S متعلق نباشد عدد فروبنیوس S می نامیم و آن را با $F(S)$ نشان میدهیم و طبق تعریف آن داریم:

$$F(S) + 1 + \mathbb{N} \subseteq S$$

و نیز $F(S) + 1$ را هادی S می نامیم.
هادی دو نیمگروه چسبیده $S = S_1 +_d S_2$ توسط هادی هرکدام از نیمگروه ها و نیز d قابل محاسبه است و و به سادگی میتوان فرمولی برای عدد فروبنیوس نیمگروه های عددی چسبیده به دست آورد که یکی از اهداف کار ما تعمیم این فرمول برای نیمگروه های آفین است!
فرض کنیم S یک نیمگروه عددی باشد. عضو $g \in \mathbb{Z} \setminus S$ را شبه عدد فروبنیوس گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$g + S \setminus \{0\} \subseteq S$$

ویژه عدد فروبنیوس نیمگروه S یک شبه عدد فروبنیوس نیز هست.
تعداد اعضای مجموعه ی شبه اعداد فروبنیوس نیمگروه S را نوع (کوهن مکالی) S می نامیم و آن را با $t(S)$ نشان میدهیم.
نیمگروه عددی S . رامتقارن گوییم هرگاه نوع آن برابر با ۱ باشد
نیمگروه عددی به هم چسبیده $S = S_1 +_d S_2$ متقارن است اگر و تنها اگر هریک از نیمگروه های S_1 و S_2 متقارن باشند و داریم:

$$t(S_1 +_d S_2) = t(S_1)t(S_2)$$

$(*)$

توجه داریم که چسباندن نیمگروه های عددی اندکی متفاوت است و درواقع برای اینکار تکوارهای S_1 و S_2 را بر مقسوم علیه مشترکشان تقسیم میکنیم تا نیمگروه های عددی S_1 و S_2 بدست آیند.
نیمگروه عددی S را شبه متقارن گوییم هرگاه تنها دارای دو شبه عدد فروبنیوس $F(S)$ و نصف آن باشد.
نیمگروه عددی S را تقریبا متقارن گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$|\mathbb{N} \setminus S| = \frac{F(S)+t(S)}{۲}$$

فرمول $(*)$ را میتوان بعنوان تعمیم این حقیقت دانست که نیمگروه حاصل از چسباندن دو نیمگروه متقارن ؛ متقارن است و نیز نشان میدهد که
۱) نیمگروه حاصل از چسباندن نیمگروه های عددی شبه متقارن نمیتواند شبه متقارن باشد.
۲) نیمگروه حاصل از چسباندن نیمگروه های عددی نامتقارن تقریبا متقارن ؛ تقریبا متقارن نیست. فرض کنیم S یک نیمگروه آفین باشد و $S \setminus \{۰\}$.مجموعه ی اپری S را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$Ap(S,s) = \{x \in S \mid x - s \notin S\}$$

مجموعه ی فوق درحالت کلی دارای تعداد نامتناهی عضو است ولی اگر S یک نیمگروه عددی باشد و $s \in S \setminus \{۰\}$ در این صورت داریم:

$$|Ap(S,s)| = s$$

کوچکترین عدد صحیح مثبت متعلق به S را چندگانگی S می نامیم و آن را با m نشان میدهیم.
فرض کنیم m چندگانگی S و $A = \{n_۱, \ldots, n_k\}$ دستگاه مولد مینیمال S باشد که در آن $n_۱ < n_۲ < \cdots < n_k$.
داریم:

$$n_۱ = m$$

و

$$Ap(S,m) \subseteq \{\sum_{i=۲}^{k} a_i n_i \mid a_i \leq \alpha_i \,,\; i \in \{۲, \ldots, k\}\}$$

$(**)$

که در آن

$$\alpha_i = max\{k \in \mathbb{N} \mid kn_i \in Ap(S,m)\}$$

زمانیکه در رابطه ی $(**)$ تساوی برقرار شود گوییم مجموعه ی اپری ؛ α –مستطیل است.
هر نیمگروه عددی با مجموعه ی اپری α –مستطیل میتواند توسط چسباندن نیمگروهی عددی با همین ویژگی و یک کپی از $\mathbb{N}$ تولید شود.
فرض کنیم S یک نیمگروه آفین و K یک میدان باشد.دراین صورت حلقه ی نیمگروهی $K[S]$ را به صورت زیر تعریف میکنیم :

$$K[S] = \bigoplus_{s \in S} Kt^s$$

که درآن t متغیر است .
در این حلقه جمع به صورت مولفه به مولفه و ضرب با توجه به قانون توزیع پذیری زیر تعریف میشوند:

$$\forall r, r' \in S \; ; \; t^r t^{r'} = t^{r+r'}.$$

اگر S نیمگروه عددی باشد دراین صورت $K[S]$ یک زیرحلقه ی $K[t]$ است.
به تازگی نشان داده شده است که برای هرخانواده ی $\{I\}$ ایدال $K[S_i]$ با $i \in \{1,2\}$ توسط دو تک جمله ای تولید میشود.
اگر S نیمگروه عددی و $A = \{n_1, \ldots, n_k\}$ دستگاه مولد مینیمال آن باشد دراین صورت
$m = (t^{n_1}, \ldots, t^{n_k})$ ایده‌ال ماکزیمال منحصربه فرد حلقه ی سری‌های توانی
$R = K[[t^{n_1}, \ldots, t^{n_k}]] = K[[S]]$ است. تابع هیلبرت حلقه ی مدرج وابسته ی $gr_m(R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \frac{m^n}{m^{n+1}}$ به صورت زیر تعریف میشود :

$$n \mapsto dim_K(\frac{m^n}{m^{n+1}})$$

اگر تابع هیلبرت حلقه های مدرج وابسته ی $K[[S_1]]$ و $K[[S_2]]$ غیرنزولی باشند دراین صورت تابع هیلبرت حلقه ی مدرج وابسته ی $K[[S_1 +_d S_2]]$ زمانی چنین خواهد بود که چسباندن ؛ چسباندن خوبی باشد!

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مفاهیم نظریه ی مجموعه ها

تعریف ۱.۱.۱. یک رابطه بین مجموعه های A و B زیرمجموعه ای مانند R از $A \times B$ است که به صورت زیر تعریف میشود:

$R = \{(a,b) \in A \times B \mid aRb\}$

و به اصطلاح میگوییم a و b باهم در رابطه هستند.
هر رابطه بین مجموعه ی A و خودش را رابطه روی A می نامیم.

مثال ۱. فرض کنیم A یک مجموعه باشد.رابطه ی تساوی بین اعضای A یک رابطه روی A است که به صورت زیر تعریف میشود:

$$R = \{(a,a) \mid a \in A\} \subseteq A \times A \quad (۱.۱)$$

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم A یک مجموعه باشد.ترتیب جزیی مانند $\leq$ روی مجموعه ی A یک رابطه روی A است که
الف) انعکاسی باشد یعنی داشته باشیم:

$\forall a \in A \; ; \; a \leq a$

ب) بازتابی باشد یعنی داشته باشیم:

$$\forall a,b \in A\ ;\ a \leq b \quad \& \quad b \leq a \Rightarrow a = b$$

ج) ترایایی باشد یعنی داشته باشیم:

$$\forall a,b,c \in A\ ;\ a \leq b \quad \& \quad b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

بعلاوه اگر داشته باشیم :

$$\forall a,b \in A\ ;\ a \leq b\ \vee\ b \leq a$$

ترتیب $\leq$ را کامل گوییم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم S یک مجموعه باشد.عمل دوتایی $*$ روی آن به صورت زیر تعریف میشود:

$$* : S \times S \to S$$

$$*(a,b) = a * b$$

به طوریکه به هرعضو (a,b) از $S \times S$ عضوی مانند $a * b$ را در S نسبت میدهد.

۲.۱ مفاهیم اولیه جبرخطی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم K یک میدان باشد دراین صورت فضای برداری روی میدان K یک گروه آبلی جمعی مانند V به همراه ضرب اسکالر زیر می باشد:

$$. : K \times V \to V$$
$$(a,v) \mapsto av$$

به طوریکه برای هر $a,b \in K, u,v \in V, ۱ \in K$ شرایط زیر برقرار باشند:

الف) $a.(u+v) = au + av$

ب) $(a+b).v = av + bv$

ج) $(ab)v = a(bv)$

د) $1v = v$

اعضای V را بردار و اعضای میدان K را اسکالر می نامیم.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری باشد . مجموعه ی $\{v_1, \ldots, v_p\}$ را در V مستقل خطی گوییم هرگاه معادله ی $c_1v_1 + \cdots + c_pv_p = 0$ دارای تنها یک جواب بدیهی زیر باشد:

$$c_1 = 0, \ldots, c_p = 0$$

۳.۱ مفاهیم اولیه ی جبری

تعریف ۱.۳.۱. نیمگروه مجموعه ای مانند S به همراه عمل دوتایی $+$ روی آن است به طوریکه اعضای S نسبت به آن شرکت پذیر باشند یعنی داشته باشیم:

$$\forall a, b, c \in S\ ;\ a + (b + c) = (a + b) + c$$

و به اختصار $(S, +)$را با همان نماد S نشان میدهیم.

تعریف ۲.۳.۱. تکوار مجموعه ای مانند S به همراه عمل دوتایی $+$ روی آن است به طوریکه دارای شرایط زیر باشد:

۱) $\forall x, y, z \in S\ ;\ (x + y) + z = x + (y + z)$

۲) $\forall x \in S\ ;\ \exists e \in S \quad s.t \quad x + e = e + x = x$

درواقع تکوار همان نیمگروهی است که دارای عضو خنثی باشد.
به اختصار $(S, +)$را با S و عضو خنثی را نیز با 0 نشان میدهیم.

تعریف ۳.۳.۱. زیرتکوار تکواری مانند S با عمل دوتایی $+$ مجموعه ای مانند H است که $H \subseteq S$ و داریم:

۱) $0 \in H$

۲) $\forall a,b \in H\ ;\ a+b \in H$

تعریف ۱.۳.۴. فرض کنیم $A=\{a_1,\dots,a_r\}$ زیرمجموعه ای از تکوار S باشد. تکوار تولیدشده توسط A کوچکترین زیرتکوار S و شامل A است.بعبارتی تکوار تولیدشده توسط A اشتراک تمام زیرتکوارهای S و شامل A می باشد و داریم:

$$\langle A\rangle = \{\sum_{i=1}^{r} n_i a_i \mid r \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N}, a_i \in A, 1 \leq i \leq r\}$$

حال اگر $S=\langle A\rangle$.گوییم S توسط A تولید میشود یا A دستگاه مولد S است.

تعریف ۱.۳.۵. تکوار S را با تولید متناهی گوییم هرگاه دارای یک دستگاه مولد متناهی باشد .

تعریف ۱.۳.۶. تکوار G را گروه گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$\forall g \in G\ ;\ \exists (-g) \in G \quad s.t \quad g+(-g)=(-g)+g=0$$

بعبارت دیگر تکواری را که عضو آن دارای وارونی در خودش باشد گروه می نامیم و عضو وارون هر عضو آن را با $(-g)$ نشان میدهیم .

تعریف ۱.۳.۷. فرض کنیم G یک گروه باشد گوییم گروه G آبلی است هرگاه داشته باشیم:

$$\forall g,g' \in G\ ;\ g+g'=g'+g$$

تعریف ۱.۳.۸. فرض کنیم G یک گروه باشد.زیرمجموعه ی ناتهی H از G را زیرگروه G گوییم هرگاه H و عمل دوتایی $+$ یک گروه باشد بعبارت دیگر هرگاه داشته باشیم:

$$\forall a,b \in H\ ;\ ab^{-1} \in H$$

تعریف ۱.۳.۹. فرض کنیم G یک گروه آبلی و $G_1,\dots,G_n,\dots$ زیرگروه های آبلی G باشند. جمع مستقیم متناهی $G_1 \bigoplus \cdots \bigoplus G_n$ را با استقراء روی n به صورت زیر تعریف میکنیم:

برای $n=2$ داریم:

$G=G_1 \bigoplus G_2$ هرگاه دوشرط زیر برقرار باشند:

الف) $G=G_1+G_2$ یعنی داشته باشیم:

$$\forall a \in G \to \exists g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\ ;\ a=g_1+g_2$$

ب) $G_1 \cap G_2 = \{0\}$

برای $n > 2$ داریم:

$$G_1 \bigoplus \cdots \bigoplus G_{n+1} = [G_1 \bigoplus \cdots \bigoplus G_n] \bigoplus G_{n+1}$$

و آن را با علامت زیر نشان میدهیم:

$$\sum_{i=1}^{n} G_i = G_1 \bigoplus \cdots \bigoplus G_n$$

هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) $G = G_1 + \ldots + G_n$

ب) $G_i \notin G_1 \cap G_{i-1} \cap G_{i+1} \cap \ldots \cap \qquad \forall i$

تعریف ۱.۳.۱۰. فرض کنیم H زیرگروه G باشد.اگر $g \in H$ همدسته ی راست H تولیدشده توسط g را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$Hg = \{hg \mid h \in H\}$$

و به طور مشابه

$$gH = \{gh \mid h \in H\}$$

همدسته ی چپ H تولیدشده توسط g است.

تعریف ۱.۳.۱۱. فرض کنیم H زیرگروه G باشد. H را زیرگروه نرمال G گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$\forall g \in G\ ;\ gH = Hg$$

و آن را با $H \trianglelefteq G$ نشان میدهیم.

تعریف ۱.۳.۱۲. اگر H زیرگروه نرمال G باشد.ضرب گروه را روی همدسته های آن به صورت زیر تعریف میکنیم :
اگر aH و bH همدسته های چپ H در G باشند :

$$(aH)(bH) = (abH)$$

همدسته های زیرگروه نرمال H در G به همراه ضرب تعریف شده در بالا یک گروه تشکیل میدهند که آن را گروه خارج قسمتی G روی H می نامیم و با $\frac{G}{H}$ نشان میدهیم. عضو خنثی در این گروه ؛ ۱ است یعنی داریم :

$$1H = H$$

و عضو وارون aH نیز $a^{-1}H$ است.

تعریف ۱۳.۳.۱. مجموعه ی R را به همراه دو عمل دوتایی $+$ و . حلقه گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند :

الف) $(R, +)$ یک گروه آبلی باشند و گوییم R برای هر عضو مانند x دارای عضو خنثی 0 و عضو وارون $-x$ است .

ب) برای هر $a, b \in R$ داشته باشیم :

ب.۱) $a.(b.c) = (a.b).c$

ب.۲) $a.(b + c) = a.b + a.c$

ب.۳) $(b + c).a = ba + ca$

بعلاوه اگر برای هر $a, b \in R$ داشته باشیم:

$$a.b = b.a$$

حلقه ی $(R, +, .)$ را جابجایی گوییم.

به اختصار حلقه ی $(R, +, .)$ را با R نشان میدهیم.

تعریف ۱۴.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد.ایدال I از حلقه ی R زیرمجموعه ای از R است به طوریکه

الف) $(I, +)$ زیر گروه جمعی $(R, +)$ باشد.

ب) برای هر $x \in R, y \in R$ داشته باشیم:

ب.۱) $xy \in I$

ب.۲) $yx \in I$

تعریف ۱۵.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه و P یک ایدال آن باشد ایدال P را اول گوییم هرگاه $P \neq \langle 1 \rangle$ و داشته باشیم:

$xy \in P \Rightarrow x \in P \ \vee \ y \in P$

تعریف ۱۶.۳.۱. مجموعه ی تمام ایدال های اول حلقه ی A را اسپکتروم گوییم و با $Spec(A)$ نشان میدهیم.

تعریف ۱۷.۳.۱. فرض کنیم A یک حلقه باشد.دنباله ی متناهی از $(n+1)$ ایدال اول A را که به صورت $P_0 \supset P_1 \supset \cdots \supset P_n$ است ؛ زنجیر اول از طول n گوییم.
اگر $P \in Spec(A)$ ؛ سوپریمم طول زنجیرهای اول با $P_0 = P$ را ارتفاع P می نامیم و آن را با $ht(P)$ نشان میدهیم.

تعریف ۱۸.۳.۱. فرض کنیم A یک حلقه و I ایدالی از آن باشد.ارتفاع ایدال I را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$ht(I) = inf\{ht(P) \mid I \subseteq P\}$

تعریف ۱۹.۳.۱. فرض کنیم I ایدال سره حلقه ی R باشد.از آنجا که I زیرگروه جمعی گروه آبلی R است پس در R زیرگروه نرمال است.در گروه خارج قسمتی $\frac{R}{I}$ ضرب همدسته های I را به صورت زیر تعریف میکنیم :

$\forall r, s \in R \,;\ (r+I).(s+I) = rs + I$

همدسته های I به همراه عمل جمع حلقه و ضرب تعریف شده در بالا یک حلقه تشکیل میدهند و آن را حلقه ی خارج قسمتی R روی I می نامیم و با $\frac{R}{I}$ نشان میدهیم.

تعریف ۲۰.۳.۱. فرض کنیم A یک حلقه ی جابجایی باشد. A-مدول M گروه آبلی M است بطوریکه برای هر $a, b \in A, x, y \in M$ و عمل دوتایی ضرب $. : A \times M \to M$ با ضابطه ی $(a, x) \mapsto a.x$ داشته باشیم:

الف) $a.(x+y) = a.x + a.y$

ب) $(a+b).x = a.x + b.x$

ج) $(a.b).x = a.(b.x)$

درصورتیکه A یک حلقه ی یکدار باشد و شرط زیر نیز برقرار باشد:

د) $1.x = x$

A-مدول M را یکانی گوییم .

تعریف ۲۱.۳.۱. حلقه ی مدرج ؛ حلقه ای مانند A به همراه خانواده ی $(A_n)_{n \geq 0}$ از زیرگروه های جمعی گروه A است بطوریکه

الف) $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$

ب) $m, n \geq 0 \; ; \; A_m.A_n \subseteq A_{m+n}$

دراینصورت A_0 یک زیرحلقه و هر A_n ؛ A_0-مدول است.

تعریف ۲۲.۳.۱. میدان K؛ حلقه ای جابجایی است که در آن $0 \neq 1$ و هرعضو ناصفر مانند a وارون پذیر است یعنی داریم:

$$\forall a \in K \; ; \; \exists a^{-1} \in K \quad s.t \quad a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$$

تعریف ۲۳.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه ی جابجایی باشد که یک فضای برداری روی میدان K نیز هست.دراین صورت R ؛ یک K-جبر جابجایی است هرگاه برای هر $\alpha \in K$ و هر $u, v \in R$ داشته باشیم:

$$(\alpha.u).v = \alpha.(u.v) = u.(\alpha.v)$$

تعریف ۲۴.۳.۱. فرض کنیم S یک نیمگروه باشد حلقه ی نیمگروهی K ؛ $K[S]$ - جبری با K-پایه ی $\{t^a \mid t \in S\}$ است که عمل جمع آن به صورت مولفه به مولفه و عمل ضرب آن نیز به صورت زیر تعریف میشود:

$$t^a.t^b = t^{a+b}.$$

تعریف ۲۵.۳.۱. فرض کنیم $(M, *_M)$ و $(N, *_N)$ دو تکوار باشند. همریختی تکواری $\phi : (M, *_M) \to (N, *_N)$ تابع روی مجموعه به صورت $\phi : M \to N$ است بطوریکه

الف) $\forall m, n \in M \; ; \; \phi(m *_M n) = \phi(m) *_N \phi(n)$

ب) $e_M \in M, e_N \in N \; ; \; \phi(e_M) = \phi(e_N)$

تعریف ۲۶.۳.۱. نیمگروه آفین ؛ تکواری با تولید متناهی مانند S است که برای برخی $n \in \mathbb{Z}$ میتوان آن را در $\mathbb{Z}^n$ نشاند.

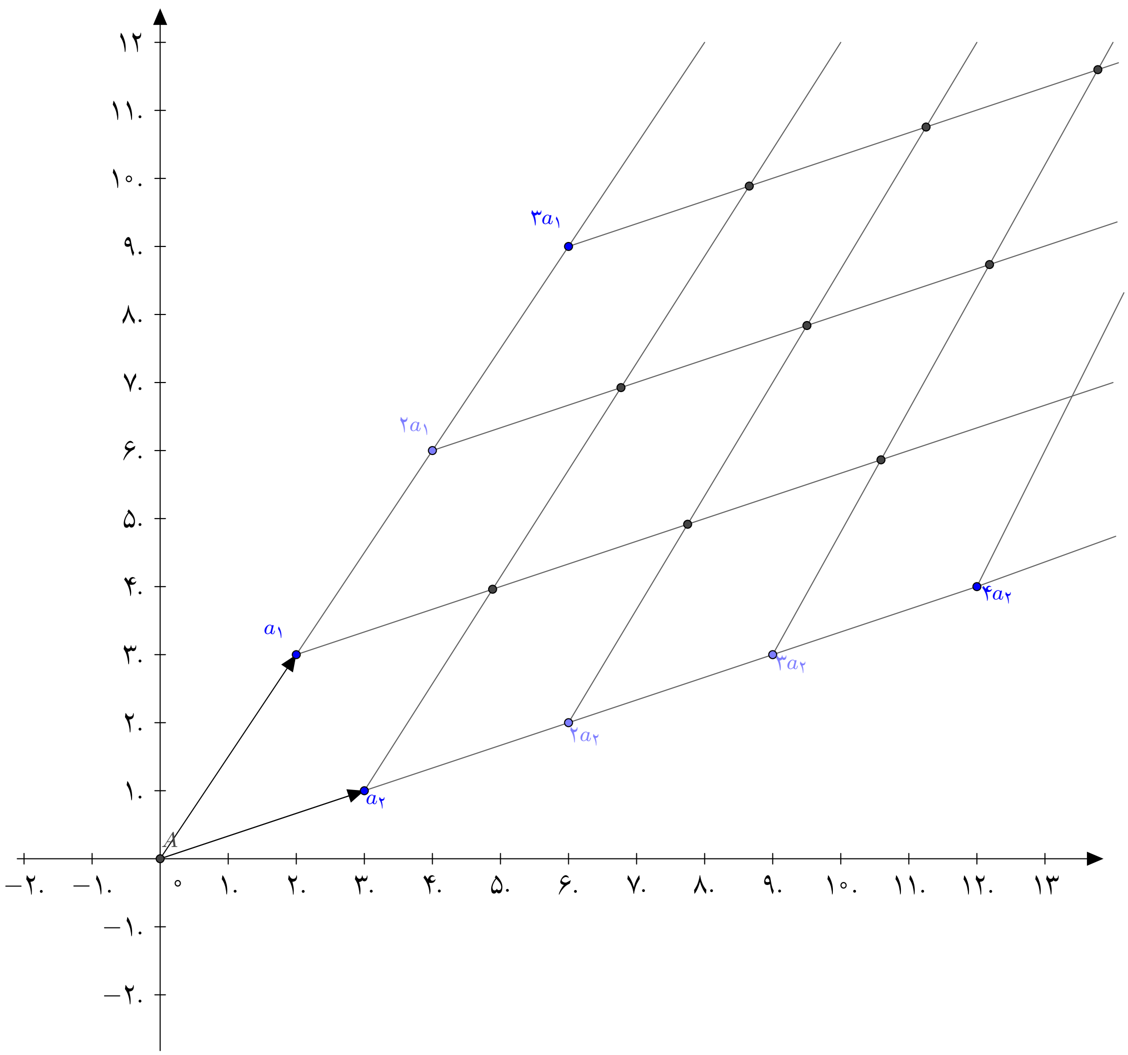
تعریف ۲۷.۳.۱. فرض کنیم S یک نیمگروه آفین باشد نیمگروه S را کاهش یافته گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$S \cap (-S) = \{0\}$$

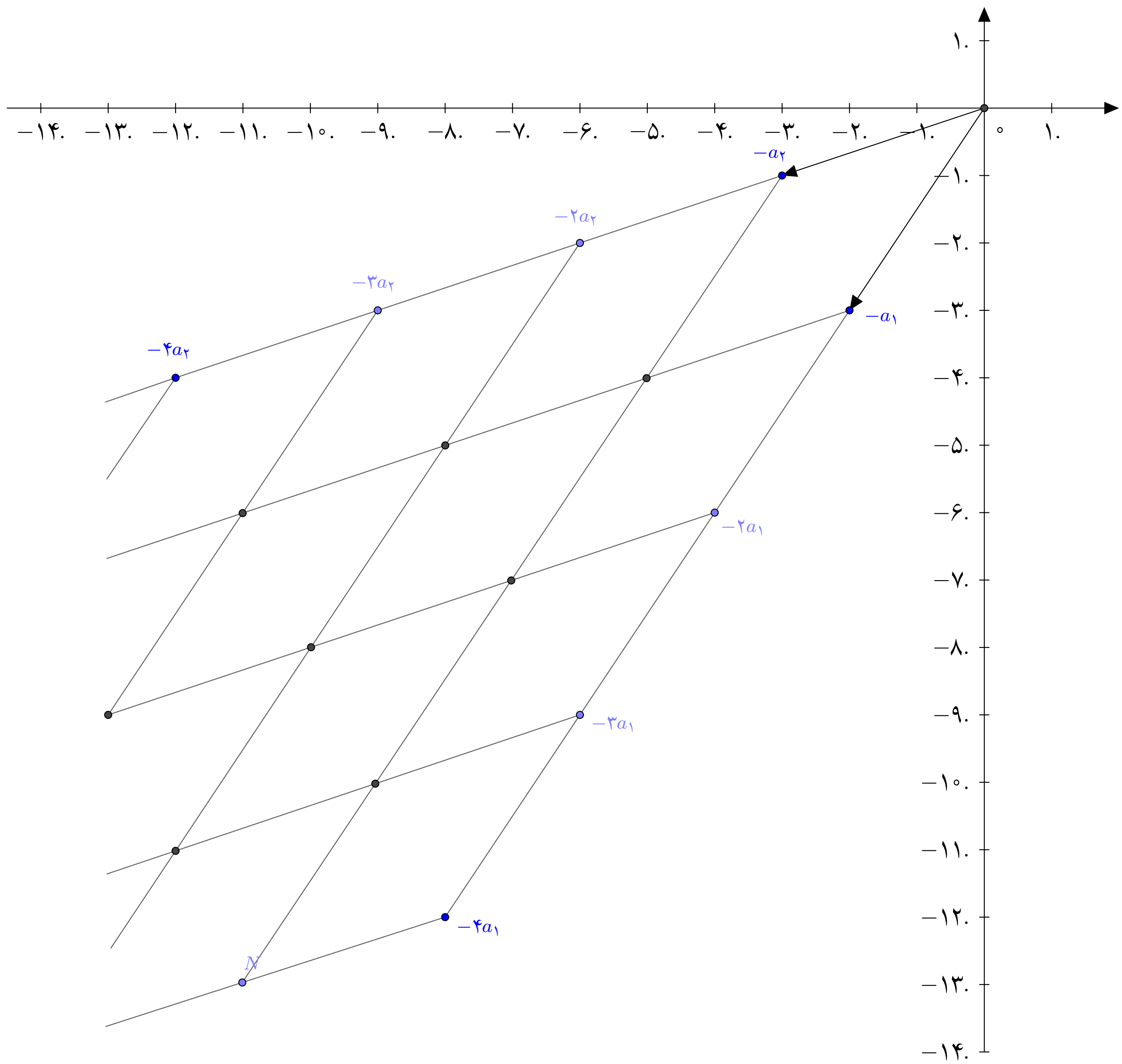
تعریف ۲۸.۳.۱. فرض کنیم S یک نیمگروه آفین باشد دراین صورت گروه تولیدشده توسط S را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$G(S) = \{a - b \mid a, b \in S\}$$

مثال ۲. فرض کنیم $A = \{a_1 = (2, 3), a_2 = (3, 1)\}$ و $S = \langle A \rangle$.



شکل ۱.۱:



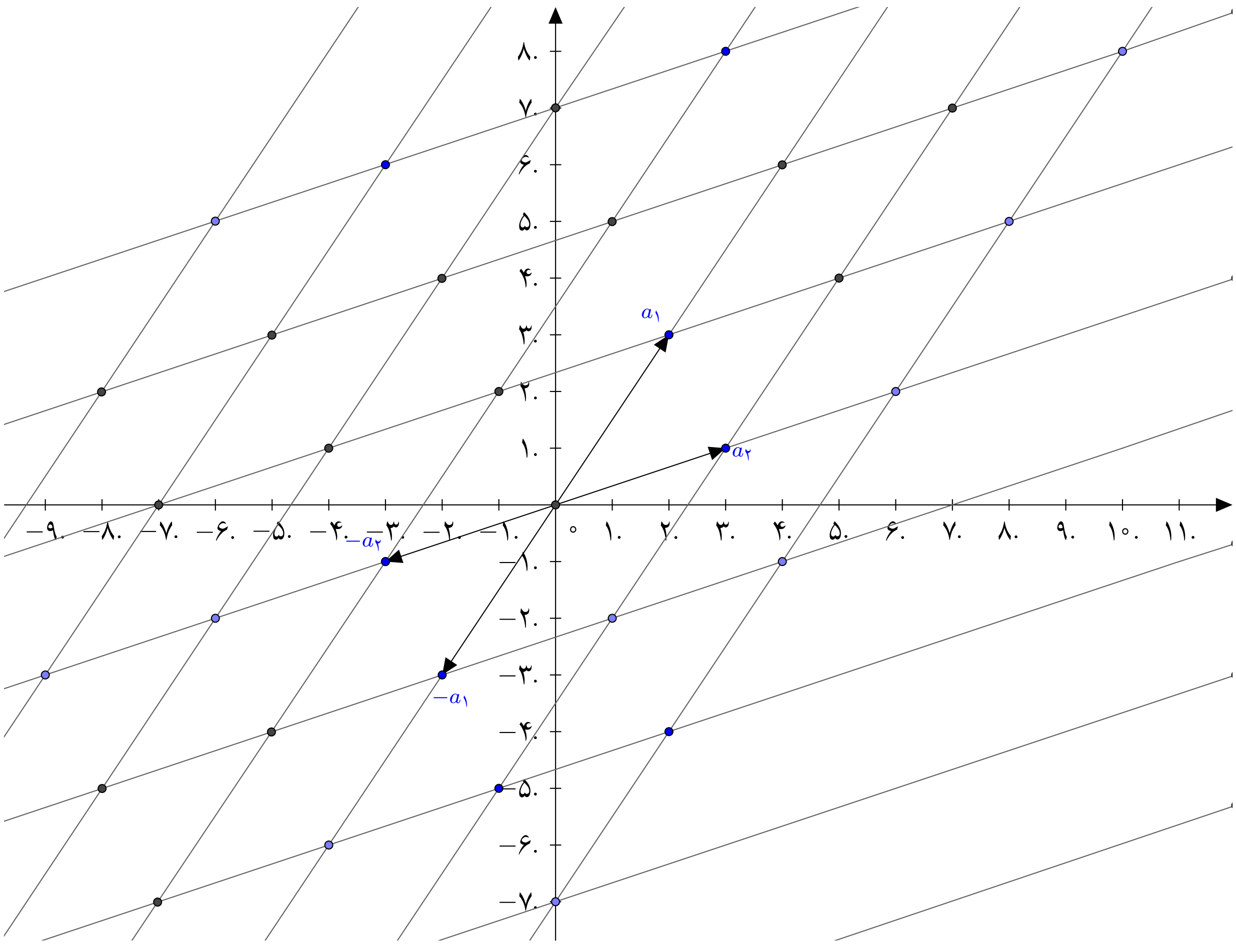
شکل ۲.۱:

طبق تعریف؛ S زیرتکواری از $\mathbb{N}^۲$ است که دارای دستگاه مولد متناهی می‌باشد بنابراین S یک نیمگروه آفین است.
آنچه در شکل ۱.۱ می‌بینیم نیمگروه آفین تولیدشده توسط مجموعه‌ی A است و در شکل ۲.۱ نیز $(-S)$ را تشکیل

داده‌ایم. با توجه به شکل‌های ۱.۱ و ۲.۱ داریم:

$$S \cap (-S) = \{0\}$$

در نتیجه S نیمگروه آفین کاهش‌یافته است.



شکل ۳.۱:

آنچه در شکل ۳.۱ می‌بینیم نیز گروه تولیدشده توسط نیمگروه آفین S است.

تعریف ۲۹.۳.۱. فرض کنیم S یک نمیگروه آفین و $s \in S \setminus \{0\}$ باشد.مجموعه ی اپری s در S به صورت زیر تعریف میشود :

$$Ap(S,s) = \{x \in S \mid x - s \notin S\}$$

تعریف ۳۰.۳.۱. نیمگروه عددی ؛ زیرتکواری مانند S است که دارای متمم متناهی در $\mathbb{N}$ باشد.

تعریف ۳۱.۳.۱. فرض کنیم S یک نیمگروه عددی باشد.بزرگترین عدد صحیحی را که متعلق به S نیست عدد فروبنیوس گوییم و آن را با $F(S)$ نشان میدهیم.بنابراین داریم:

$$F(S) + ۱ + \mathbb{N} \subseteq S$$

تعریف ۳۲.۳.۱. فرض کنیم S یک نیمگروه عددی و $F(S)$ عدد فروبنیوس آن باشد. در این صورت $F(S) + ۱$ را هادی S می نامیم .

تعریف ۳۳.۳.۱. مخروط گویا در فضای برداری $\mathbb{Q}^n$ زیرمجموعه ای مانند C است بطوریکه تحت ترکیبات خطی با ضرایب مثبت در $\mathbb{Q}$ بسته باشد. بعبارتی $C \subseteq \mathbb{Q}^n$ یک مخروط است هرگاه داشته باشیم:

$$\forall x \in C, \lambda \in \mathbb{Q}_{>۰} \Rightarrow \lambda x \in C$$

تعریف ۳۴.۳.۱. فرض کنیم $u = (u_۱, \ldots, u_k) \in \mathbb{Z}^k$ دراین صورت تعریف میکنیم :

$$u^+ = (\alpha_۱, \ldots, \alpha_k) \quad ; \quad \alpha_i = \begin{cases} u_i & u_i \geq ۰ \\ ۰ & u_i < ۰ \end{cases}$$

$$u^- = (\beta_۱, \ldots, \beta_k) \quad ; \quad \beta_i = \begin{cases} -u_i & u_i \leq ۰ \\ ۰ & u_i > ۰ \end{cases}$$

داریم:

$u = u^+ - u^-$ که در آن u^+ را قسمت مثبت و u^- را قسمت منفی u می نامیم.

تعریف ۳۵.۳.۱. فرض کنیم L یک مجموعه ی ناتهی باشد که آن را الفبا می نامیم و اعضای آن را حروف L گوییم.مجموعه ی شامل تمام دنباله های مرتب با طول متناهی و بزرگتر از صفر را با L^* نشان میدهیم یعنی برای $n \in \mathbb{N}$ و $b_۱, \ldots, b_n \in L$ عضوی مانند w از L به صورت زیر است:

$$w = b_۱ \ldots b_n$$

که اعضای آن را کلمات روی الفبای L می نامیم. کلمات تک حرفی مانند b در L را به همان صورت b در L^* نشان میدهیم یعنی $L \subseteq L^*$.

مجموعه ی L^* با عمل دوتایی زیر یک نیمگروه آزاد روی L تشکیل میدهد:

$$. : L^* \times L^* \to L^*$$

$$(v, w) \mapsto vw$$

$$v = a_1 \ldots a_m \ , \ w = b_1 \ldots b_n$$

$$vw = a_1 \ldots a_m b_1 \ldots b_n$$

نیمگروه آزاد L^* دارای خاصیت جهانی زیر است:

فرض کنیم L^* یک نیمگروه آزاد روی L و S نیمگروهی دلخواه و $f : L \to S$ نگاشتی بین دو نیمگروه L و S باشد.دراین صورت همریختی نیمگروهی منحصربه فرد $f^* : L^* \to S$ موجود است بطوریکه دیاگرام زیر جابجایی باشد:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[dr, hook, "j"'] & S \\ & L^* \arrow[u, dashed, "\exists ! \bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

ملاحظه ۱. خاصیت ارشمیدسی اعداد

فرض کنیم $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ دراینصورت

$$\exists n \in \mathbb{Z}_{>0} \ ; \ na > b$$