فصل ۱

فصل ۳:نشاننده های سوبولوف

گیریم که (M,g) یک منیفلد ریمانی بعدی-n باشد.در این فصل ما به دنبال جواب این سؤال هستیم : تحت چه شرایطی نشاننده های سوبولوف روی منیفلد M برقرار است ؟ یک بار برای همیشه هنگامی که صحبت از نشاننده های سوبولوف است آن گاه :

تعریف ۱ـ۰ـ۱ (نشاننده های سوبولوف). برای هر p و هر q متعلق به اعداد حقیقی که $1 < q < p$ و m و kکه هر دو عدد صحیح هستند به طوری که $0 \leq m < k$.اگر $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{(k-m)}{n}$ لذا $H_k^p \subset H_k^q$. در ادامه،نماد $H_k^p \subset H_k^q$ شامل تداوم نشاننده است این به آن معنی است که ثابت مثبت $C = C(M, p, q, k, m)$ موجود است طوری که برای هر $u \in H_k^q$، $\|u\|_{H_m^p} \leq C\|u\|_{H_k^q}$.

برخی از حالت ها نشاننده ها ابتدا توسط سوبولوف [So] اثبات شده است،نتایج آن را به قضیه نشاننده سوبولوف ارجاع می‌دهیم.در این فصل خواهیم دید که این نشاننده ها برای منیفلد های فشرده برقرار هستند.بعد به مسائل پیچیده تر روی منیفلد های پیچیده تر می‌پردازیم.

ابتدا به اثبات دو نتیجه اساسی که اغلب در ادامه استفاده خواهد شد می‌پردازیم.اولین نتیجه به خوبی شناخته شده است.

لم ۱ـ۱ـ۱. گیریم (M, g) یک منیفلد ریمانی فشرده بعدی-n باشد.فرض کنیم که نشاننده $H_۱^۱ \subset L^{\frac{n}{n-۱}}(M)$ برفرار باشد.لذا برای هر عدد حقیقی $۱ \leq q < p$ و هر عدد صحیح $k > m \leq$ که در شرط $\frac{۱}{p} = \frac{۱}{q} - \frac{k-m}{n}$ صدق کند داریم :

$$H_m^p \in H_k^q \, .$$

برهان. ثابت می‌کنیم که اگر $H_k^q(M) \subset L^{\frac{n}{n-۱}}(M)$ پس برای هر $p > q \geq ۱$ و هر عدد صحیح که $= \frac{۱}{p}$ $\frac{۱}{q} - \frac{۱}{n}$ آنگاه $H_۱^q(M) \subset H_m^q(M)$ برقرار است.گیریم $A \in \mathbb{R}$ به طوری که برای هر $u \in H_۱^۱(M)$

$$(\int_M |u|^{\frac{n}{n-1}}\mathrm{d}v(g))^{\frac{n-1}{n}} \leq A\int_M(|\nabla u|+|u|)\mathrm{d}v(g)$$

گیریم برای هر p > q $\leq$ ۱ و هر عدد صحیح که $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$ و $u \in D(M)$.قرار می دهیم $\phi = |u|^{\frac{p(n-1)}{n}}$.

بنا به نامساوی هولدر

$$\int_M |u|^p\mathrm{d}v(g))^{\frac{n-1}{n}} = (\int_M |\phi|^{\frac{n}{n-1}}\mathrm{d}v(g)))$$

$$\leq A\int_M(|\nabla\phi| + |\phi|)\mathrm{d}v(g)$$

(۱ - Ap(p =

$$\overline{}$$

$$n\int_M |u|^{p'}|\nabla u|\mathrm{d}v(g)+A\int_M |u|^{\frac{p(n-1)}{n}}\mathrm{d}v(g)$$

$$\leq A\frac{p(n-۱)}{n}(\int_M |u|^{p'q'}\mathrm{d}v(g))^{\frac{۱}{q'}}(\int_M |\nabla u|^q \mathrm{d}v(g))^{\frac{۱}{q}}$$
$$\int_M |u|^{p'q'}\mathrm{d}v(g))^{\frac{۱}{q'}})(\int_M |p|^p \mathrm{d}v(g))^{\frac{۱}{q}}\mathrm{A}(+$$

که $\frac{۱}{q'} + \frac{۱}{q} = ۱$ و $p' = \frac{n-۱}{n} - ۱$.اما $p'' = p$ تا آنجا که $\frac{۱}{p} = \frac{۱}{q} - \frac{۱}{n}$. برای هر $u \in D(M)$ ،

$$(\int_M |u|^p \mathrm{d}v(g))^{\frac{۱}{p}} \leq A\frac{p(n-۱)}{n}(\int_M |\nabla u|^q \mathrm{d}v(g))^{\frac{۱}{q}} + (\int$$

بنا به قضیه ۷.۲ اثبات تمام است.

□

تذکر ۱ـ۱ـ۲ـ۱۰۲ . خاطر نشان می‌کنیم که اثبات لم ۱.۳

نشان می‌دهد که اگر $A \in \mathbb{R}$ باشد به طوری که برای هر $u \in H_1^1(M)$

$$(\int_M |u|^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}v(g))^{\frac{n-1}{n}} \leq A \int_M (|\nabla u| + |u|) \mathrm{d}v(g)$$

پس برای هر $1 \leq q < n$ و هر $u \in H_1^q(M)$ ،

$$(\int_M |u|^p \mathrm{d}v(g))^{\frac{1}{p}} \leq A \frac{p(n-1)}{n} (\int_M |\nabla u|^q \mathrm{d}v(g))^{\frac{1}{q}} +$$

که $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{n}$.

۲. در پاراگراف پنجم از فصل سوم خواهیم دید که مبحثی در مورد لم ۱.۳ برای منیفلد های کامل با انحنای ریچی از پایین کراندار وجود دارد.به عنوان مثال خواهیم دیدکه اگر (M, g) یک منیفلد ریمانی کامل با انحنای ریچی از پایین کراندار باشد و اگر $H_1^1(M) \subset L^p(M)$ برای $1 < q < p$ و $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{n}$ آنگاه $H_1^1(M) \subset L^{\frac{v}{(n-1)}}(M)$.

کار را با بحث درباره لم بعدی ادامه می‌دهیم.این لم ناشی از بسط دادن توسط کارون [1] به کل نشاننده های فضای H_1^q در L^p که درستی حالت H_1^1 در $L^{\frac{n}{(n-1)}}$ را بیان می‌کند.

[1] Carron

لم ۱ـ۱ـ۳. گیریم (M, g) یک منیفلد ریمانی ریمانی کامل باشد.فرض کنیم که نشاننده $H_1^q \subset L^{(M)}$ برای $n > q \leq 1$ و $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$ برقرار باشد.آنگاه برای هر $r > 0$ ثابت مثبت $v = v(M, g, r)$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in M$ ، $Vol_g(B_x(r)) \geq v$.

برهان. بنا به فرض $H_1^q(M) \subset L^{(M)} \subset L^{(M)}$ که برای $1\ leqq < p$ و برای هر p داشته باشیم $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$.
گیریم $A > 0$ به طوری که برای هر $u \in H_1^q$ ،

$$(\int_M |u|^p \mathrm{d}v(g))^{\frac{1}{p}} \leq A(\int_M |\nabla u|^q \mathrm{d}v(g))^{\frac{1}{q}} + (int_M|u$$

گیریم $r > ۰$ و $x \in M$ و گیریم $v \in H_۱^q(M)$ به طوری که $v = ۰$ روی $M_x(r)$.بنا به نامساوی هولدر ،

$$(\int_M |v|^q \mathrm{d}v(g))^{\frac{۱}{q}}) \leq Vol_g(B_x(r)^{\frac{۱}{n}}(\int_M |v|^p \mathrm{d}v(g))^{\frac{۱}{p}}$$

بنابراین

$$\frac{۱}{Vol_g(B_x(r))^{\frac{۱}{n}}} - A \geq \frac{(\int_M |\nabla v|^q \mathrm{d}v(g))^{\frac{۱}{q}}}{(\int_M |v|^q \mathrm{d}v(g))^{\frac{۱}{q}}}$$

قرار می‌دهیم $x \in M$ و از به بعد ثابت باشد.گیریم $R > ۰$ داده شده باشد.لذا، $Vol_g(B_x(R)) > (۱/۲A)^n$

پس در این حالت برای هر $r \in (۰, R]$

$$\frac{1}{Vol(B_x(M))^{1/n}} - A \geq \frac{1}{2Vol_g(B_x(r))^{1/n}}$$

فرض کنیم که $2Vol_g(B_x(r)) \leq (1/2A)^n$.پس برای هر $r \in (0, R]$ و هر $v \in H_1^q(M)$ به طوری که $v = 0$ روی $M_x(r)$ ،

$$\frac{1}{(2A)^q} Vol_g(B_x(r))^{\frac{-q}{n}} \leq \frac{\int_M |\nabla v|^q \mathrm{d}v(g)}{\int_M |v|^q \mathrm{d}v(g)}$$

از حالا به بعد گیریم ،

$$v(y) = r - \mathrm{d}_g(x, y) if \mathrm{d}_g(x, y) \leq r$$

$$v(y) = ۰ if \mathrm{d}_g(x, y) \geq r.$$

واضح است که v و یک تابع لیپشیتزی است و $v =$ ۰ روی $M_x(r)$ می‌باشد.بنا بر قضیه ۵.۲ v متعلق به $H_۱^q(M)$ است.و در ادامه،

$$\frac{۱}{(۲A)^q} Vol_g(B_x(r))^{\frac{-q}{n}} \leq \frac{Vol_g(B_x(r))}{\int_{B_x(r/۲)} v^q \mathrm{d}v(g)} \leq \frac{۲^q Vol_g(}{r^q Vol_g(B}$$

$$Vol_g(B_x(r)) \geq (\frac{r}{۴A})^{nq/(n+q)} Vol_g(B_x(r/۲))^{n/(n+q)} ، r$$

با این القا،ما درمی‌ابیم که برای هر ۰ $m \in N\{$

$$_g(B_x(R)) \geq \frac{R}{۲A}^{q\alpha(m)} \frac{۱}{۲}^{q\beta(m)} Vol_g(B_x(R/۲^m))^{\gamma(m)}$$

(۱ـ۱)

که

$$\alpha(m) = \sum_{i=۱}^{m} (\frac{n}{n+q})^i, \beta(m) = \sum_{i=۱}^{m} i(\frac{n}{n+q})^i, and\gamma(m$$

به عنوان مثال theorem،GaHL] ۹۸.۳]، $Vol_g(B_x(r)) =$ $b_n r_n(۱ + o(r))$ که b_n حجم یک گوی ژئودزیکی اقلیدسی به شعاع واحد است.بنابراین،

$$\lim_{m\to\infty} Vol_g(B_x(R/۲^m))^{\gamma(m)} = ۱$$

به علاوه خواهیم داشت :

$$\sum_{i=۱}^{\infty}(\frac{n}{n+q})^i = \frac{n}{q}\sum_{i=۱}^{n+q} i(\frac{n}{n+q})^i = \frac{n(n+q)}{q^۲}$$

در ادامه هنگامی که $m \to \infty$ در ۱ ـ ۱ خواهیم داشت

:

$$Vol_g(B_x(R)) \geq (\frac{۱}{۲^{(n+۲q)/q}A})^n \mathbb{R}^{\ltimes}$$

و در نهایت برای هر $x \in M$ و هر $R > ۰$

$$Vol_g(B_x(R)) \geq min(۱/۲A, R/۲^{(۲^{n+۲q}/q)}A)^n$$

و اثبات تمام است. □

تذکر ۱ـ۱ـ۴.۱ . اثبات لم ۲.۳ بستگی دقیقی به v خواهد داشت.به عنوان مثال v بستگی به n و q و r و ثابت A روی نشاننده $H_{۱}^{q}(M)$ در $L^{p}(M)$ خواهد داشت.

۲ . در حقیقت ما از $Vol_g(B_x(r)) = b_n r^r(۱ + o(r))$ استفاده کردیم.به بیان دقیق تر

$$Vol_g(B_x(r) = b_n r^n(۱ - \frac{Scal_{(M,g)}(x)}{۶(n+۲)})r^{۲} + o(r^{۲}))$$

که $Scal_{(M,g)}$ اثر g روی $Rc_{M,g}$ است که انحنای عددی (M,g) می‌باشد. برای مثال بیشتر به [GaHL، theorem ۹۸.۳] مراجعه شود.

۳. برای بحث های بهتر، مشابه آنچه که در [Ch، chap - ter ۶] ما را به نتایج مشابه در حالت $q = ۱$ خواهد رساند. به بیان دقیق تر برای هر $x \in M$ و تقریبا تمام $r > ۰$ ثابت می‌شود که :

$$Vol_g(B_x(r))^{n-۱/n} \geq A\frac{d}{dr}Vol_g(B_x(r))+AVol_g(B_x(r)$$

که A یک ثابت از نشانده $H_1^1(M)$ در $L^{n/(n-1)}(M)$

است. در ادامه برای هر $R > 0$ داده شده و همچنین

همچنین خواهیم $Vol_g(B_x(R)) \geq (1/2A)^n$

داشت، $Vol_g(B_x(R)) \leq (1/2A)^n$ لذا برای

تقریبا تمام $r \in (0, R]$ $\leq (1/2A) Vol_g(B_x(r))^{1-1/n}$

$\frac{d}{dr} Vol_g(B_x(r)$

این نامساوی جالب برای هر $x \in M$ و هر $R > 0$

$Vol_g(B_x(R)) \geq min((1/2A)^n, (R/2nA)^n)$،

برقرار است.

هدف از این پاراگراف این است که چطور نشاننده سوبولوف روی فضای

$\mathbf{R}^n$.[Ni] [۲] $Gagliardo[Ga]..$

لم ۱ـ۲ـ۱. برای هر $u \in D(\mathbb{R}^n)$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{n/(n-1)} \mathrm{d}x\right)^{(n-1)/n} \leq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \mathrm{d}x\right)^{1/n}$$

که در آن $\mathrm{d}x$ عنصر حجم لبگ $\mathbb{R}^n$ است.

[۲] Nirenbern

برهان. ما اثبات برای حالت $n = ۳$ را ارائه می‌دهیم.اثبات در حالت $n \neq ۳$ به صورت مشابه است.گیریم P یک نقطه از $\mathbb{R}^{۳}$ با مختصات (x, y, z) باشد،$(x_{۰}, y_{۰}, z_{۰})$ مختصات نقطه‌ی P و D_x و به طور متناظر $D_y D_z$ فاصله خط مستقیم بین دو نقطه مذکور موازی با محور ها-x (وبه طور متناظر موازی با محور ها-y و محور -z ها) است.با توجه به این نکات عنصر حجم لبگ $\mathrm{d}x$ این لم به صورت $dxdydz$ خواهد بود.گیریم $u \in D(R^n)$ باشد.خواهیم داشت،

$$u(P) = \int_{-\infty}^{x_{۰}} (\partial_x u)(x, y_{۰}, z_{۰})\mathrm{d}x = -\int_{x_{۰}}^{+\infty} (\partial_x u)(x$$

در ادامه $|u(P)| \leq \frac{1}{2}\int_{D_x}|(\partial_x u)(x,y_0,z_0)|\mathrm{d}x$.با استدلالی مشابه برای $\partial_y u$ و $\partial_z u$ خواهیم داشت :

$$|P(P)|^{3/2} \leq (\frac{1}{2})^{3/2}(\int_{D_x}\partial_x u)(x,y_0,z_0)\mathrm{d}x)^{1/2}$$

$$\times(\int_{D_x}|\partial_x u)(x_0,y,z_0)|\mathrm{d}y)^{1/2}(\int_{D_z}(\partial_x u)(x_0,y_0,z)\mathrm{d}z)$$

حال با انتگرال گیری x_0 روی میدان $\mathbb{R}$ و با استفاده از نامساوی هولدر،

$$\int_{D_x}|u(x,y_0,z_0)|^{3/2}\mathrm{d}x \leq (\frac{1}{2})^{3/2}(\int_{D_x}|(\partial_u)(x,y_0,z_0)$$

$$\times(\int_{D_{xy}}|(\partial_y u)(x,y,z_0)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^{1/2}((\int_{D_{xz}}|(\partial_z u)(x,y_0,$$

که در آن D_{xy} (همچنین D_{xy}) صفحه گذرنده از P و موازی با محور x-ها و y-ها (همچنین x-ها و z-ها) است.با انتگرال گیری از $y_۰$ روی $\mathbb{R}$ و با استفاده از نامساوی هولدر خواهیم داشت :

$$\int_{D_{xy}} |u(x,y,z_۰)|^{۳/۲}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq (\frac{۱}{۲})^{۳/۲}(\int_{D_{xy}} |(\partial_x u)(x,$$

$$\times(\int_{D_{xy}} |(\partial_y u)(x,y,z_۰)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^{۱/۲}(\int_{\mathbb{R}^×} |(\partial_z u)(x,y,z$$

و دست آخر با انتگرال گیری از $z_۰$ روی $\mathbb{R}$ نتیجه حاصل می‌شود و اثبات تمام است.

$\square$

با به دست آمدن یک چنین نتایجی،در موقعیتی هستیم که نشاننده های سوبولوف را برای $\mathbb{R}^{\ltimes}$ ها اثبات کنیم.

گیریم که $q \in [1, n)$ و گیریم p داده شده باشد به طوری که $1/p = 1/q - 1/n$.برای هر $u \in H_1^q(\mathbb{R}^n)$ ،

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p} \leq \frac{p(n-1)}{2n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^q \mathrm{d}x\Big)^{1/q} \qquad (۱ـ۲)$$

در حالت خاص برای هر عدد حقیقی $1 \leq q < p$ و هر عدد صحیح $0 \leq m < k$ که در شرط $1/p = 1/q - (k-m)/n$ صدق کند،آن گاه :

$$H_1^q(\mathbb{R}^n) \subset H_m^p(\mathbb{R}^n)$$

برهان. به عنوان یک ادامه سر راست از لم ۳.۳،می‌دانیم که $H_1^q(\mathbb{R}^n) \subset L^{n/(n-1)}\mathbb{R}^n$ و این که برای هر $u \in H_1^1(\mathbb{R}^n)$ ،

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{n/(n-1)} \mathrm{d}x\right)^{(n-1)/n} \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| \mathrm{d}x$$

با استفاده از لم ۱.۳ خواهیم دید که برای هر عدد حقیقی $q < q \leq ۱$ و هر عدد صحیح $k < m \leq ۰$ که در شرط $۱/p = ۱/q-(k-m)/n$ $H_k^q(\mathbb{R}^n) \subset$ $H_m^p(\mathbb{R}^n)$ و در آخر یک محاسبه ساده با استفاده از لم ۱.۳ نشان می‌دهد که برای هر $p < q \leq ۱$ و هر $u \in H_۱^q(\mathbb{R}^n)$

$$(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \mathrm{d}x)^{۱/p} \leq \frac{p(n-۱)}{۲n} (\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^q \mathrm{d}x)^{۱/q}$$

که $۱/p = ۱/q - ۱/n$.

$\square$

تذکر ۱ـ۲ـ۲. ضریب $\frac{p(n-1)}{2n}$ در ۱ـ۲ بهینه نیست

برای درک بهتر موضوع بهترین ثابت K به پاراگراف ۴ .۲

ارجاع می‌دهیم به طوری که برای هر $u \in H_1^q(\mathbb{R}^n)$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leq K\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

ابتدا یادآوری می کنیم که اثبات نشاننده های معروف به نشاننده های سوبولوف روی منیفلد های فشرده نیز بر قرار است. لذا ما درباره قضیه مشهور به رلیک- کوندراکوف [۳] برای منیفلد های فشرده بیان می کنیم. سپس به حالت های خاص آن می‌پردازیم. تمام نشاننده های داده شده با نشاننده‌ی سوبولوف فشرده هستند و در آخر هم درباره پوانکاره و نامساوی سوبولوف- پوانکاره Sobolev-Poincare می‌پردازیم.

[۳] Rellich–Kondrakov

گیریم (M, g) یک منیفلد بعدی-n ریمانی فشرده باشد. برای هر عدد حقیقی $p < q \leq 1$ و هر عدد صحیح $k < m \leq 0$ که در شرط $1/p = 1/q - (k - m)/n$ صدق کند داریم :

$$H_k^q(M) \subset H_m^p(M) \, .$$

برهان. با استفاده از لم ۱.۳ فقط باید ثابت کنیم که نشاننده‌ی $H_1^1(M) \subset L^{n/(n-1)}(M)$ برقرار است.حال از آن جایی که M فشرده است لذا چارتی متناهی برای M $(\Omega_m, \phi_m)_{m=1,\ldots,N}$ موجود است به طوری که برای هر m که ترکیبات g_{ij} از g در (Ω_m, ϕ_m) که در شرط $(1/2)\delta_{ij} \le g_{ij} \le 2\delta_{ij}$ صدق کند که یک ۲ـفرمی است.گیریم ζ_m یک افراز هموار واحد است که تابع پوشش Ω_m می‌باشد.برای هر $u \in C^\infty(M)$ و هر m خواهیم داشت :

$$\int_M |\zeta_m u|^{n/(n-1)} \mathrm{d}v(g) \le 2^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |(\zeta_m u) \circ \phi_m^{-1}|^{n/(n}$$

و

$$\int_M |\nabla(\zeta_m u)| \mathrm{d}v(g) \geq 2^{-(n+1)/2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla((\zeta_m u)\circ \phi_m^{-}$$

به طور مستقل،با استفاده از قضیه ۱ـ۲ خواهیم داشت

:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\zeta_m u)\circ \phi_m^{-1}(x)|^{n/(n-1)} \mathrm{d}x\right)^{(n-1)/n} \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |$$

برای هر m.در ادامه برای هر $u \in C^\infty(M)$ ،

$$\int_M |u|^{n/(n-1)} \mathrm{d}v(g))^{(n-1)/n} \leq \sum_{m=1}^N (\int_M |\zeta_m u|^{n/(n-$$

$$\leq 2^{n-1} \sum_{m=1}^N \int_M |\nabla(\zeta_m u)| \mathrm{d}v(g)$$

$$\leq 2^{n-1} \int_M |\nabla u| \mathrm{d}v(g)$$

$$+ 2^{n-1} (\max_M \sum_{m=1}^N |\nabla \zeta_m|) \int_M |u| \mathrm{d}v(g)$$

که اثبات تمام است. $\square$

حال بپردازیم به قضیه رلیک۔ کوندراکوف.اگر (M, g) یک منیفلد فشرده، $Vol_{(M,g)}$ هم متناهی باشد.در ادامه برای هر هر عدد صحیح $\tilde{p} \leq p \leq$ ۱، $L^{\tilde{p}}(M)$.با استفاده از قضیه ۱ـ۳ خواهیم فهمید که برای هر عدد صحیح $j \geq$ ۰ و $m \geq$ ۱ و هر عدد حقیقی $q \geq$ ۱ و هر عدد حقیقی p به طوری که $1 \leq p \leq nq/(n - mq)$ آنگاه $H^q_{j+m}(M) \subset H^p_j(M)$.با استفاده از قضیه رلیک۔ کوندراکوف دستگیرمان می‌شود که نشاننده این نشاننده های فشرده شرط $p < nq/(n - mq)$ را فراهم می‌آورند.یادآوری می‌کنیم که اگر $(E, \|.\|_E)$ و $(F, \|.\|_F)$ به ترتیب نرم دو فضای $E \subset F$ باشد،نشاننده‌ی E در F

گیریم (M, g) **یک منیفلد ریمانی فشرده بعدی-n باشد.برای هر عدد صحیح** $j \geq ۰$ **و** $m \geq ۱$ **و هر عدد حقیقی** $q \geq ۱$ **و هر عدد حقیقی** p **به طوری که** $۱ \leq p < nq/(n-mq)$**،آنگاه نشاننده‌ی** $H_{j+m}^{q}(M)$ **در** $H_j^p(M)$ **فشرده است.**

برهان. اثبات به تفصیل است لذا ما فقط به ذکر نکات کلیدی بسنده می‌کنیم.ابتدا با استفاده از قضیه ۳۳.۲ در [Au۶،theorem ۳۳.۲] می‌توان اثبات کرد که برای هر دامنه کراندار Ω از $\mathbb{R}^n$ و هر $n < q \leq ۱$ و هر $(n-q)/nq > p \leq ۱$ ، نشاننده $H_۱^q(M)'$ در $L^p(\Omega)$ فشرده است.حال از آن جایی که ترکیب دو نشاننده پیوسته فشرده است اگر تنها یکی از آن ها فشرده باشد،خواهیم فهمید که برای هر دامنه کراندار Ω از $\mathbb{R}^n$ و هر q،m و p در قضیه ۶.۳ ،نشاننده $H_m^q(M)'$ در $L^p(\Omega)$ فشرده است.(فقط اشاره می‌کنیم که بنا به قضیه ۱ـ۲، $H_m^j(\Omega)' \subset H_۱^{q'}(\Omega)$ که در آن $((۱ - m) - ۱/q = ۱/(q'$ در حالی که بنا به آنچه که گفتیم نشاننده‌ی $H_۱^{q'}(\Omega)'$ در $L^p(M)$ فشرده است.با استفاده از قضیه میرـسرین [Ad،theorem

$\square$

نتیجه ۱ـ۳ـ۱. گیریم (M,g) یک منیفلد ریمانی فشرده بعدی-n باشد.برای هر $1 \leq q < n$ و هر $p \geq 1$ به طوری که $1/p > 1/q - 1/n$،نشاننده $H_1^q(M)$ در $L^n(M)$ فشرده است.

حال می‌خواهیم در مورد نامساوی های پووانکاره و سوبولوف ـ پووانکاره صحبت کنیم.ابتدا لم زیر را اثبات می‌کنیم.

لم ۱ـ۳ـ۲. گیریم (M, g) یک منیفلد ریمانی بعدی-n فشرده باشد.وگیریم که $1 \leq q < n$ یک عدد حقیقی باشند.ثابت مثبت $A = A(M, g, q)$ وجود دارد به طوری که برای هر $u \in H_1^q(M)$ ،

$$\left(\int_M |u-\bar{u}|^q \mathrm{d}v(g)\right)^{1/q} \leq A\left(\int_M |\nabla u|^q \mathrm{d}v(g)\right)$$

که $\bar{u} = \frac{1}{Vol_{(M,g)}} \int_M u\mathrm{d}v(g)$.

که به این نامساوی،نامساوی پووانکاره گویند.

برهان. فرض کنیم که $q > 1$.برای اثبات لم ۱ـ۳ـ۲ تنها می‌باید ثبت کنیم که :

$$inf_{u\in H}\int_M |\nabla u|^q \mathrm{d}v(g) > ۰$$

که در آن

$$H = \{u \in\ H_۱^q(M) s.t. \int_M |u|^q \mathrm{d}v(g) = ۱ and \int u\mathrm{d}v(g$$

گیریم $(u_k) \in H$ باشد به طوری که

$$\lim_{k\to\infty}\int_M |\nabla u_k|^q \mathrm{d}v(g) = inf_{u\in H}\int_M |\nabla u|^q \mathrm{d}v(g)$$

با ترکیب این حقیقت که $H_1^q(M)$ برای $q > 1$ منعکس است و بنا به قضیه رلیک-کوندراکوف ۱ـ۳ یک زیر دنباله (u_k) از (u_k) موجود است که همگرای ضعیف در $H_1^q(M)$ و همگرای قوی در $L^q(M) \cap L^1(M)$ است.گیریم v حد آن باشد.همگرایی قوی در $L^q(M) \cap L^1(M)$ بیان می‌کند که $v \in H$ که از همگرایی ضعیف آن می‌فهمیم که :

$$\int_M |\nabla v|^q \mathrm{d}v(g) \leq \lim_{k \to \infty} \int_M |\nabla u_k|^q \mathrm{d}v(g)$$

در ادامه $int_{u \in H} \int_M |\nabla u|^q \mathrm{d}v(g)$ که با حضور v و از آن جایی که نمی‌تواند ثابت باشد لذا

$$inf_{u\in H}\int_M |\nabla u|^q \mathrm{d}v(g) > ۰$$

که این نامساوی پووانکاره را برای حالت $q > ۱$ اثبات می‌کند.در حالت $q = ۱$ می‌توان از این حقیقت شناخته شده روی منیفلدهای فشرده استفاده کرد که همواره یک تابع گرین [۴] موجود است که لاپلاسین آن وجود دارد.به بیان دقیق‌تر،برای مثال بیشتر [Au۶،theorem ۱۳.۴] را ببینید،اگر(M, g) یک منیفلد ریمانی فشرده بعدی-n باشد که وجود داشته باشد $G : M \times M \to \mathbb{R}$ به طوری که

۱. برای هر هر $u \in C^\infty(M)$ و هر $x \in M$

[۴] Green function

$$u(x) = \frac{1}{Vol_{(m,g)}} \int_M u\mathrm{d}v(g) + \int_M G(x,y)\Delta_g u(y)\mathrm{d}v_g$$

۲. که $G(y,x) = G(x,y)$ و $G(x,y)$ یک نگاشت C^∞ روی $M \times M\Delta$ که Δیک مجموعه مورب است به طوری که :

$$\Delta = \{(x,g) \in M \times M s.t x = y\}$$

۳. یک ثابت $K > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $(x,y) \in M \times M\Delta$

$$|G(x,y)| \leq \frac{K}{r^{n-۲}} and |\nabla_g G(x,y)| \in \frac{K}{r^{n-۱}}$$

که $r = d_g(x,y)$ یک فاصله‌ی ریمانی x از yاست.

حال گیریم که $u = C^{\infty}(M)$ باشد به طوری که $\int_M u \mathrm{d}v(g) = ۰$.پس برای هر x خواهیم داشت :

$$u(x) = \inf_M G(x,y)\Delta_g u(y) \mathrm{d}v_g(y)$$

بنابراین

$$|u(x)| \leq \int_M |\nabla_y G(x,y)||\nabla u(y)| \mathrm{d}v_g(y)$$

و

$$\int_M |u(x)|\mathrm{d}v_g(y) \le \int_M \int_M |\nabla G_y(x,y)||\nabla u(y)|\mathrm{d}v_g($$

$$\le C \int_M |\nabla u(y)|\mathrm{d}v_g(y)$$

C به طوری که برای هر $y \in M$، $\int_M |\nabla_y G(x,y)|\mathrm{d}v_g(y) \le$
C. (یادآوری می‌کنیم که G در شرط $|\nabla_y G(x,y)| \le$
K/r^{n-1}). در ادامه برای هر $u \in C^\infty(M)$ به طوری
که $\int_M u\mathrm{d}v(g) = 0$

$$\int_M |u|\mathrm{d}v(g) \leq C \int_M |\nabla u|\mathrm{d}v(g)$$

و نامساوی پووانکاره برای هر $q = ۱$ اثبات شده است. که اثبات تمام است.

$\square$

حال اگر نامساوی های پووانکاره با نامساوی های سوبولوف آمیخته شود با $H_۱^q \subset L^p$ مربوط است. که به نامساوی سوبولوف- پووانکاره موسوم است.

گزاره ۱ـ۳ـ۳. گیریم (M, g) یک منیفلد فشرده n- بعدی فشرده و گیریم p و q دو عدد حقیقی باشند به طوری که $n < q \leq ۱$ و $۱/p = ۱/q - ۱/n$. وجود دارد یک ثابت مثبت $A = A(M, g, q)$ به طوری که برای هر $u \in H_۱^q(M)$ ،

$$\left(\int_M |u - \bar{u}|^p \mathrm{d}v(g)\right)^{۱/p} \leq A\left(\int_M |\nabla u|^q\right)^{۱/q}$$

که $\bar{u} = \frac{۱}{Vol_{(M,g)}} \int_M u \mathrm{d}v(g)$.

برهان. با توجه به قضیه ۱ـ۳ ثابت مثبت B وجود دارد به طوری که برای هر $u \in H_۱^q(M)$ ،

$$(\int_M |u-\bar{u}|^p \mathrm{d}v(g))^{۱/p} \leq B(\int_M |\nabla u|^q \mathrm{d}v(g))^{۱/q} + B(\int_M$$

به طور مسقل با استفاده از قضیه ۱ـ۳ـ۲ یک ثابت

$C > ۰$ موجود است به طوری که برای هر $u \in H_۱^q(M)$

$$(\int_M |u-\bar{u}|^q \mathrm{d}v(g))^{۱/q} \leq C(\int_M |\nabla u|^q \mathrm{d}v(g))^{۱/q}$$

بنابراین برای هر $u \in H_۱^q(M)$ ،

$$(\int_M |u-\bar{u}|^p \mathrm{d}v(g))^{۱/p} \leq B(۱+C)(\int |\nabla u|^q \mathrm{d}v(g))^{۱/q}$$

که اثبات تمام است.

□

گیریم (Z, d_Z) یک فضای متریک و A و B هم دو زیر مجموعه از Z باشند.برای $\epsilon > ۰$ قرار می‌دهیم :

$$U_\epsilon(A) = \{z \in Z s.t d_Z(z, A) < \epsilon\} U_\epsilon(B) = \{z \in Z s$$

فاصله کلاسیک هاسدورف برای زیر مجموعه های یک فضای متریک به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$d_Z^H(A,B)=inf\{\epsilon>0 s.tB\subset U_\epsilon(A)andA\subset U_\epsilon(B)\}$$

در حالت کلی تر اگر (X,d_x) **و** (Y,d_Y) **دو فضای متریک باشند می‌توان فاصله گروموف‌ـهاسدورف** [۵] **که با** $d_H(X,Y)$ **نشان می‌دهیم به صورت زیر است :**

$$d_H(X,Y)=\inf\ d_Z^H(f(X),g(Y))$$

که اینفیموم از سراسر فضای متریک $d_H(Z,d_Z)$ **و تمام ایزومتری های**

[۵] Gromov-Hausdorff

$$f:(X,d_x)\to(Z,d_Z), g:(Y,d_y)\to(Z,d_z)$$

برای فضای متریک فشرده، d_H یم فاصله است. گیریم $n \geq ۳$ یک عدد صحیح، $q \in [۱,n)$، $V > ۰$ و $A > ۰$.تعریف می‌کنیم $M(n,q,V,A)$ مانند یک منیفلد ریمانی فشرده بعدی-n که در شرط $Vol_{(M,g)} \leq V$ به طوری که برای هر $u \in C^{\infty}(M)$

$$(\int_M |u|^{nq/(n-q)} v(g))^{(n-q)/nq} \leq A((\int_M |\nabla u|^q v(g))$$

که در ادامه به آن می‌پردازیم.

گزاره ۱-۴-۱۰ برای هر nو q متعلق به بازه $[۱, n)$ و $V > ۰$ و $A > ۰$، $M(n, q, V, A)$یک پیش سازه برای فاصله گروموف-هاسدورف است.

برهان. بنا برلم ۱ـ۱ـ۳ یک نگاشت $v : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ وجود دارد به طوری که برای هر $(M,g) \in M$ و هر $r > ۰$ و هر $x \in M$، $Vol_g(B_x(r)) \geq v(r)$.در ادامه برای هر $(M,g) \in M$ و هر $\epsilon > ۰$ عدد ماکسیمال گوی های منفک به شعاع ϵ که M هم می‌تواند شامل آن باشد،از بالاکراندار است که $N = [V/v(\epsilon)] +$ ۱.در حالت خاص یک $d > ۰$ وجود دارد به طوری که برای هر $(M,g) \in M$ ، $d \leq diam_{(M,g)}$ که در آن $diam_{(M,g)}$ قطر منیفلد (M,g) است.گزاره ۱ـ۴ـ۱ یک دنباله ساده ازگزاره ۲.۵ گرازه‌ی گروموف ـلافونتین ـ پانسو Gromov-Lafontain-pansu ، [GrLp] است و اثبات تمام است.

$\square$

حال در مورد $C^{k,\alpha}$ همگرایی دنباله از یک منیفلد ریمانی فشرده صحبت می کنیم. گیریم n و k دو عدد صحیح و $\alpha \in (0, 1)$، (M_j, g_j) یک دنباله از یک منیفلد ریمانی فشرده بعدی-n ، M یک منیفلد فشرده و g یک $C^{k,\alpha}$ متر ریمانی روی M باشد. بنا به تعریف (M_j, g_j)، برای همگرایی $C^{k,\alpha}$ به (M, g) اگر j_0 موجود باشد به طوری که در شرایط زیر صدق کند : برای هر $j \geq j_0$ وجود داشته باشد یک دیفئومورفیسم $\Phi_j : M \to M_j$ در $C^{k+1,\alpha}$ به طوری که در هر چارت از یک زیر اطلس از C^∞ اطلس کامل M ، ترکیب متر های $sideset^*_j\Phi g_j$ همگرای $C^{k,\alpha}$ به ترکیب های g است. مجموعه‌ی M از منیفلد های فشرده بعدی-n را در یک $C^{k,\alpha}$ـ توپولوژی پیش ساز

۰۱ $\wedge \leq |K_{(M,g)}|$ **and** $V \leq Vol_{(M,g)}$ **، که** $K_{(M,g)}$ **انحنای موضعی از** (M, g) **است.**

۰۲ برای هر $u \in C^{\infty}(M)$

$$(\int_M |u|^{nq/(n-q)} \mathrm{d}v(g))^{(n-q)/nq} \leq A((\int_M |\nabla u|^q \mathrm{d}v(g))$$

گزاره ۱ـ۴ـ۰۲ برای هر n و q متعلق به بازه $[۱, n)$ ، $\wedge > ۰$ ، $V > ۰$ و $A > ۰$ در این صورت $\tilde{M}(n, q, \wedge, V, A)$ پیش ساز در $C^{۱,\alpha}$-توپولوژی است برای هر $\alpha \in (۰, ۱)$

برهان. مانند قبل،وجود دارد یک $v' > 0$ و $d > 0$ به طوری که برای هر $(M, g) \in M$ ، $Vol_{(m,g)} \geq v'$ و $diam_{(M,g)} \leq d$ بنابراین با استفاده از قضیه چیگر-گروموف-تیلور [۶] وجود دارد $i > 0$ به طوری که برای هر $(M, g) \in M$،$inj_{(M,g)} \geq i$ واثبات تمام است.

□

گزاره ۱ـ۴ـ۳. یک دنباله ساده از قضیه ۱ .1.1 *است.*

[۶] ChGT

نتیجه ۱ـ۴ـ۴. برای هر $n, q \in [1, n)$، $0 < \wedge$، $0 < V$ و $0 < A$ تنها یک دیفئومورفیسم متناهی ما بین منیفلد های $M(n, q, \wedge, V, A)$ موجود است.به عبارت دیگر عدد متناهی N از منیفلد های $M_1, \ldots, M_N$ موجود است به طوری که اگر $\tilde{M} \in (M, g)$ پس M دیفئومورف با یک M_i است.

تذکر ۱ـ۴ـ۵. در ادامه‌ی نتیجه‌ی بالا به راحتی متوجه می‌شویم که برای هر $n, q \in [1, n)$، $0 < \wedge$ و $0 < A$ داده شده باشد.آنگاه یک دیفئومورفیسم متناهی بین منیفلدهای (M, g) وجود دارد به طوری که :

$$|K_{(M,g)}|\,Vol_{(M,g)}^{2/n} \le \wedge$$

و به طوری که برای هر $u \in C^{\infty}(M)$

$$(\int_M |u|^{nq/(n-q)})^{(n-q)/nq}$$

$$\le A((\int_M |\nabla u|^q \mathrm{d}v(g))^{1/q} + Vol_{(M,g)}^{-1/n}(\int_M |u|^q \mathrm{d}v(g))$$

فقط یک نکته را اشاره می‌کنیم در حالت $|K_{(M,g)}|\,Vol_{(M,g)}^{2/n} \le \wedge$ نامساوی های بالا ناوردا هستند.

در این بخش بحث در مورد نشاننده های سوبولوف روی منیفلد های کامل است.ما فقط به بحث در مورد نشاننده های $H_۱^q \subset L^p$ می‌پردازیم اما یاد آور می‌شویم که با توجه به لم ۱ـ۱ـ۱ ،اگر $H_۱^۱ \subset ^{n/n(n-۱)}$ fhan پس تمام نشاننده های $H_k^q \subset H_m^p$ بر قرار است.ابتدا حالت مخالف برای منیفلد های فشرده را خواهیم دید، که برای منیفلد های فشرده یک نشاننده وجود پارپ که نشاننده سوبولوف آن زیر مجموعه فضای L^pآن نیست.وجود چنین منیفلد هایی بر پایه لم ۱ـ۱ـ۳ است.از طرفی در قضیه ؟؟ خواهیم دید که وجود نشاننده های سوبولوف برای منیفلد های کامل با انحنای ریچی از پایین کراندار به طور کلی حل و فصل خواهد شد.برای

ابتدا گزاره زیر را اثبات می‌کنیم.

گزاره ۱-۵-۱. برای هر عدد صحیح بزرگتر از ۳ $n \geq$ ،وجود دارد یک منیفلد بعدی-n (M,g) برای هر یک از تمام مقیاس های نشاننده سوبولوف که $H_1^q \subset L^p$ نادرست است.به عنوان مثال برای هر یک از $1 \leq q <$ n و $1/p = 1/q - 1/n$، $H_1^q(M) \not\subset L^p(M)$.

برهان. بنا به حاصل ضرب متر ریمانی و حاصل ضرب منیفلدها خواهیم داشت :

$$M = \mathbb{R} \times S^{n-1}, g(x,\theta) = \xi_x + u(x)h_\theta$$

که در آن ξ متر اقلیدسی $\mathbb{R}$ و h نیز متر استاندارد کره واحد $S^{n-۱}$ از $\mathbb{R}^n$ است.گیریم $u : \mathbb{R} \to (۰, ۱]$ هموار باشد به طوری که $u(x) = ۱$ که وقتی $x \leq ۰$، و $u(x) = e^{-۲x}$ در صورتی که $x \geq ۱$.واضح است که اگر $y = (x_۱, \theta_۱)$ و $z = (x_۲, \theta_۲)$ دو نقطه از M باشد،پس $|x_۲ - x_۱| \geq d_g(y, z)$. بنابراین (M, g) کامل است.به علاوه اگر $y = (x, \theta)$ یک نقطه از $M = \mathbb{R} \times S^{n-۱}$ باشد پس $B_y(۱) \subset (x - ۱, x + ۱) \times S^{n-۱}$.در ادامه وقتی $x \geq ۲$،

$$Vol_g(B_{(x,\theta)}(۱)) \leq Vol_g((x-۱, x+۱) \times \mathbf{Vol}\, S^{n-۱})$$
$$\leq \omega_{n-۱} \int_{x-۱}^{x+۱} e^{-(n-۱)t}\mathrm{d}t$$
$$\leq C(n)e^{-(n-۱)x}$$

که درآن $\omega_{n-۱}$ حجم $(S^{n-۱}, h)$ و $C(n) = \frac{\omega}{(n-۱)}(e^{n-۱} - e^{۱-n})$ از این رو برای هر $\theta \in S۶n - ۱$

$$\lim_{x\to\infty} Vol_g(B_{x,\theta}(۱)) = ۰$$

و بنا به لم ۱ـ۱ـ۳ متوجه می‌شویم که برای هر عدد حقیقی $n > q \geq ۱$ و $۱/p = ۱/q - ۱/n$،

$$H_۱^q(M) \not\subset L^p(M)$$

که اثبات تمام است. $\square$

تذکر ۱ـ۵ـ۲. انحنای ریچی منیفلد (M, g) در اثبات گزاره ۱ـ۵ـ۱ ساخته شد که از پایین کراندار است.در واقع از آن جایی که

$$Rc_{S^{n-۱},h} = (n - ۲)h$$

به راحتی می‌بینیم که $Rc_{(M,g)}$ از پایین کراندار است اگر عدد حقیقی A وجود داشته باشد به طوری که که برای هر $\theta \in S^{n-1}$ و هر $x > 1$ ، $Rc_{(M,g)}(x,\theta) \geq Ag(x,\theta)$ گیریم :

$$g'_{(x,\theta)} = e^{2x}\xi_x + h_x$$

و R'_{ij} ترکیب های $Rc_{(M,g')}$ در یک چارت حاصل ضربی $(\mathbb{R}\times\Omega, Id\times\phi)$ است و R_{ij} ترکیب $Rc_{(M,g)}$ در همان چارت است.اگر $i=1$ و $j=1$ باشد آنگاه $Rc_{(M,g')}=0$ مادامی که $R'_{ij}=(n-2)h_{ij}$ اگر $i\geq 2$ و $j\geq 2$ باشد.فارغ از اینکه اگر $g'=e^f g$ یک متر سازگار با منیفلد با بعد n باشد پس

$$R'_{ij} = R_{ij} - \frac{n-2}{2}(\nabla^2 f)_{ij} + \frac{n-2}{4}(\nabla f)_i(\nabla f)_j - \frac{1}{2}($$

بنابراین از آن جایی که $g'=e^{2x}g$ برای $x>1$ آنگاه

برای $x>1$

$$R_{۱۱} = -(n - ۱) and R_{ij} = ۰ when j \geq ۲$$

$$R_{ij} = ((n-۲)e^{۲x}-۱)g_{ij} when i \geq ۲ and j \geq ۲$$

در ادامه برای $x > ۱$ داریم $Rc_{(M,g)} \geq -(n - ۱)g$
و انحنای ریچی (M, g) از پایین کراندار است.

حال در مورد نتایج پیش رو بحث می کنیم.این نتایج اولین بار توسط واروپولوس Varopoulos اثبات شد.(ما برای مطالعه جزئیات دقیق به پاراگراف ۶.۳ ار [val] ارجاع می‌دهیم).اثبات واروپولوس برپایه تکنبک‌های پیچیده‌ی نیم‌ـ گروه‌ها است.اثباتی که ما در اینجا به آن اشاره می کنیم سر راست‌تر است.اصل اثبات را به کولهون Coulhon و سلوف‌ـ کاست Saloff-Coste [CoS].

گیریم (M,g) یک منیفلد کامل با بعد n باشد.فرض کنیم انحنای ریچی (M,g) از پایین کراندار باشد که

$$inf_{x\in M}Vol_g(B_x(r)) > ۰$$

آنگاه یک نشاننده‌ی سوبولوف روی M برقرار است.

قبل از آنکه به اثبات قضیه ۱ ـ ۵ بپردازیم، به این نکته اشاره می‌کنیم که بنا به نتیجه گروموف فرض $inf_{x\in M}Vol_g(B_x(r)) > 0$ بیان می‌کند که برای هر $r > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in M$ ، $inf_{x\in M}Vol_g(B_x(r)) > v_r$.(قضیه ۳.۱ را ببینید). یادآور می‌شویم که بنا به لم ۱.۳ ما فقط باید $M_1^1 \subset L^{n/(n-1)}(M)$ را اثبات کنیم.

اولین قدم برای اثبات قضیه ۱ ـ ۵ این است که لم زیر را اثبات کنیم.

لم ۱ـ۵ـ۳. گیریم (M,g) یک منیفلد ریمانی کامل با بعد n باشد به طوری که برای هر $k\in\mathbb{R}$، $Rc_{(M,g)} \geq kg$ و گیریم که $R > ۰$ باشد.وجود دارد یک ثابت $C = C(n,k,R)$ وابسته به n ، k و R به طوری که برای هر $r \in (۰,R)$ و هر $u \in D(M)$

$$\int_M |u-\bar{u}|\mathrm{d}v(g) \leq Cr \int_M |\nabla u|\mathrm{d}v(g)$$

که در آن

$$\bar{u_r}(x) = \frac{۱}{Vol_g(B_x(r))}\int_{B_x(r)} u\mathrm{d}v(g), x\in M$$

برهان. گیریم که (M, g) یک منیفلد ریمانی کامل با بعد n باشد به طوری که $Rc_{M,g} \geq kg$ که برای یک $k \in \mathbb{R}$ و گیریم $R > ۰$.بنا به کار های انجام شده توسط بیوسر Buser ، [Bu]، وجود دارد ثابت مثبت $C = C(n, k, R)$ که وابسته به n و kو R است به طوری که برای هر $x \in M$ و هر $r \in (۰, ۲R)$ و هر $u \in C^{\infty}(B_x(r))$ خواهیم داشت :

$$\int_{B_x(r)} |u - \bar{u}_r(x)| \mathrm{d}v(x) \leq Cr \int_{B_x(r)} |\nabla u| \mathrm{d}v(g)$$

(۱ـ۳)

گیریم $r \in (۰, R)$ داده شده باشد و گیریم $(x_i)_{i\in I}$ یک دنباله از نقاط در M باشد به طوری که $M = \cup_i B_{x_i}(۲r)$ و $B_{x_i}(۲r) \cap B_{x_j}(۲r) \neq \emptyset$ هنگامی که $i \neq j$.اگر روند لم ۶.۱ را ادامه دهیم خواهیم داشت

:

$$Card\{i \in Is.tx \in B_{x_i}(۲r)\} \leq N = N(n, k, R) = (۱۶$$

گیریم که $u \in D(M)$ در این صورت :

$$\int_M |u-\bar{u}_r|\mathrm{d}v(g) \leq \sum_i \int_{B_{x_j}(r)} |u-\bar{u}_r|\mathrm{d}v(g)$$

$$\leq \sum_i \int_{B_{x_j}(r)} |u-\bar{u}_r(x_i)|\mathrm{d}v(g)$$

$$\sum_i \int_{B_{x_i}(r)} |\bar{u}_r(x_i)-\bar{u}_{۲r}(x_i)|\mathrm{d}v(g) +$$

$$\sum_i \int_{B_{x_i}(r)} |u-\bar{u}_{۲r}(x_i)|\mathrm{d}v(g) +$$

بنا به ۵ـ۱ خواهیم دید که

$$\sum_i \int_{B_{x_i}(r)} |u-\bar{u}_{۲r}(x_i)|\mathrm{d}v(g) \leq Cr \sum_i \int_{B_{x_i}(r)} |\nabla u|$$

$$\leq NCr \int_{B_M} |\nabla u|\mathrm{d}v(g)$$

که

$$\sum_i \int_{B_{x_i}(r)} |\bar{u}_r(x_i)-\bar{u}_{۲r}(x_i)|\mathrm{d}v(g) = \sum Vol_g(B_{x_i}(r))|\bar{u}_r(x_i)-\bar{u}_{۲r}(x_i)|$$

$$\leq \sum_i \int_{B_{x_i}(r)} |u-\bar{u}_{۲r}(x_i)|\mathrm{d}v(g)$$

$$\leq \sum_i \int_{B_{x_i}(۲r)} |u-\bar{u}_{۲r}(x_i)|\mathrm{d}v(g)$$

$$\leq ۲NCr \int_M |\nabla u|\mathrm{d}v(g)$$

به طور مستقل داریم :

$$\sum_i \int_{B_{x_i}(r)} |\bar{u}_r - \bar{u}_{۲r}(x_i)| \mathrm{d}v(g)$$

$$\leq \sum_i \int_{B_{x_i}(r)} \overline{Vol_g}$$

$$\leq \sum_i \int_{B_{x_i}(r)} \overline{Vol_g}$$

$$\leq \int_{y \in B_{x_i}(۲r)} |u(y)$$

بنا به رابطه ۱ـ۵

$$\int_{B_{x_i}(2r)} |u(y)-\bar{u}_{2r}(x_i)|\mathrm{d}v_g(y) \leq 2Cr \int_{B_{x_i}(2r)} |\nabla u|\mathrm{d}v$$

که با توجه به نتیجه‌ی قضیه گروموف خواهیم داشت :

$$\frac{1}{Vol_g(B_x(r))} \leq \frac{K}{Vol_g(B_x(2r))}$$

که در آن $K=K(n,k,R)=2^n e^{2\sqrt{(n-1)|k|}R}$.از آن جایی که $x \in B_{x_i}(r)$ پس $B_{x_i}(r)$ یک زیر مجموعه از $B_x(2r)$ است پس خواهیم فهمید که :

$$\int_{B_x(r)} \frac{1}{Vol_g(B_x(2r))}\mathrm{d}v_g(x) \leq K$$

بنابراین

$$\sum_i \int_{B_{x_i}(r)} |\bar{u}_r - \bar{u}_{۲r}(x_i)| \mathrm{d}v(g) \leq ۲KCNr \int_M |\nabla u$$

و برای هر $u \in D(M)$ خواهیم داشت :

$$\int_M |u - \bar{u}_{۲r}| \mathrm{d}v(g) \leq ۳(۱+K)NCr \int_M |\nabla u| \mathrm{d}v(g)$$

و اثبات تمام است. $\square$

در ادامه به اثبات لم زیر می‌پردازیم.

لم ۱ـ۵ـ۴. فرض کنیم که (M,g)یک منیفلد ریمانی کامل با بعد n باشد و فرض کنیم وجود داشته باشد یک $k\in\mathbb{R}$ به طوری که $Rc_{(M,g)}\geq kg$ و فرض کنیم که یک $v\geq ۰$ وجود داشته باشد که برای هر $x\in M$ داشته باشیم $Vol_g(B_x(۱))\geq v$.در این صورت وجود دارد دو ثابت $C=C(n,k,v)$ و $\eta=\eta(n,k,n)$ ،وابسته به n ، k و v به طوری که برای هر Ω از M همراه مرز هموار و بستار فشرده اگر $Vol_g(\Omega)\ \leq\ \eta$ موجود باشد،پس $Vol_g(\Omega)^{(n-۱)/n}\leq CArea_g(\partial\Omega)$.

برهان. با توجه به قضیه ۵.۱ و تذکری ۱ـ۵ـ۲ که قبل از اثبات قضیه گفته شد در ای قضیه برای هر $x \in M$ و هر $\cdot < r < R$ ،

$$Vol_g(B_x(r)) \geq \frac{1}{R^r} e^{-\sqrt{(n-1)|k|^R}} Vol_g(B_x(R)) r^n$$

فرض کنیم $R = 1$ و از این به بعد ثابت باشد.در این صورت برای هر $x \in M$ و هر $r \in (\cdot, 1)$ ،

$$Vol_g(B_x(r)) \geq (e^{-\sqrt{(n-1)|k|}} v) r^n$$

قرار می‌دهیم $\eta = \frac{۱}{۱۶}(e^{-\sqrt{(n-۱)|k|}v})$ و $C_۱ =$ $e^{-\sqrt{(n-۱)|k|}v}$. گیریم Ω یک زیر مجموعه باز از M با مرز هموار و بستار فشرده باشد به طوری که $Vol_g(\Omega) \leq \eta$. برای $\epsilon > ۰$ و به اندازه کافی کوچک توابع زیر را در نظر می‌گیریم :

- $\mathbf{u}_\epsilon(x) = ۱ if x \in \Omega u_\epsilon(x) = ۱-\frac{۱}{\epsilon}d_g(x,\partial\Omega) if x \in M/\Omega and d_g(x,\partial\Omega) \leq \epsilon$
- $\mathbf{u}_\epsilon(x) = ۰ if x \in M/\Omega and d_g(x,\partial\Omega) \geq \epsilon$

□