فهرست مطالب

فصل ۱: مقدمات و مفاهیم مورد نیاز ۱
۱ــ۱ مقدمه ۲
۱ــ۲ تعاریف و مفاهیم اولیه ۲

فصل ۲: مباني و مرور ادبیات مساله ۶
۲ــ۱ مقدمه ۷
۲ــ۲ حساب تغییرات ۷
۲ــ۳ تئوری کنترل بهینه ۹

پیوست‌ها ۱۱

مراجع ۱۲

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فصل ۱:

مقدمات و مفاهیم مورد نیاز

۱ـ۱ـ مقدمه

در این فصل، برخی مفاهیم اولیه و کلیدی مورد نیاز در فصل‌های آتی به‌طور خلاصه بیان می‌شوند.

۱ـ۲ـ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱ـ۲ـ۱ـ یک ماتریس متقارن، ماتریسی است که مولفه‌های هر سطر برابر مولفه‌های ستون متناظر آن هستند، یعنی، $a_{ij} = a_{ji}$. به عبارت دیگر، اگر $A = A^T$ ، ماتریس A را متقارن گوییم.

تعریف ۱ـ۲ـ۲ـ ماتریس Q، متقارن از مرتبه n، را نیمه‌معین مثبت گوییم اگر برای هر بردار ستونی غیر صفر x با n سطر، حاصل x^TQx یک مقدار عددی نامنفی باشد.

تعریف ۱ـ۲ـ۳ـ ماتریس R، متقارن و مربعی $m\times m$، را معین مثبت گوییم اگر برای هر بردار ستونی غیر صفر u با m سطر، حاصل u^TRu یک مقدار عددی مثبت باشد.

تعریف ۱ـ۲ـ۴ـ در ریاضیات، سری تیلور یا بسط تیلور [۱] نمایش یک تابع به‌صورت مجموع بی‌نهایت جمله است که از مشتق‌های تابع در یک نقطه به‌دست می‌آید. سری تیلور یک تابع $f(x)$ با مقادیر حقیقی یا مختلط که در همسایگی نقطه حقیقی یا مختلط $x_\circ$ بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است، سری توانیِ زیر است:

$$f(x) = f(x_\circ) + \frac{f'(x_\circ)(x-x_\circ)}{۱!} + \frac{f''(x_\circ)(x-x_\circ)^۲}{۲!} + \frac{f'''(x_\circ)(x-x_\circ)^۳}{۳!} + \dots,$$

که می‌توانیم آن را با علامت سیگما خلاصه‌تر بنویسیم: $f(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_\circ)}{n!}(x-x_\circ)^n$. توجه داشته باشید که تابع $f^{(n)}(x_\circ)$، مشتق nام تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_\circ$ است. سری تیلوری که حول نقطه $x = \circ$ نوشته شود، سری مک‌لوران [۲] نامیده می‌شود.

تعریف ۱ـ۲ـ۵ـ تابع $f(x)$ را تحلیلی نامند اگر در همسایگی $x = a$ سری تیلور آن به $f(x)$ همگرا باشد.

تعریف ۱ـ۲ـ۶ـ دنباله $f_n(x)$ را همگرای یکنواخت [۳] به تابع $f(x)$ گوییم هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon > \circ$، $N > \circ$ موجود باشد به‌قسمی‌که به‌ازای هر x متعلق به دامنه تابع و هر $n > N$ نامساوی زیر برقرار باشد:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

دقت کنید که در حالت همگرای یکنواخت، N تنها به ε بستگی دارد و به x وابسته نخواهد بود. اما در حالت همگرای نقطه‌ای N هم به ε و هم به x بستگی دارد. تعریف ریاضی همگرای یکنواخت به شکل

[۱] Taylor series [۲] Maclaurin series [۳] Uniformly convergence

زیر می‌باشد:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \quad s.t. \quad \forall x \in X,\ n > N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

و یا

$$\lim_{n\to\infty}\Big(sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)|\Big) = 0.$$

تعریف ۱ـ۲ـ۷ـ تاریخچه یا سابقه مقادیر سیگنال کنترل در مدت زمان $[t_0, t_f]$ توسط u نشان داده شده و آنرا سابقه کنترل [1] و یا به‌طور ساده کنترل گویند.

تعریف ۱ـ۲ـ۸ـ تاریخچه یا سابقه مقادیر وضعیت در فاصله $[t_0, t_f]$ به‌نام سابقه وضعیت یا منحنی وضعیت نامیده شده و توسط x نشان داده می‌شود.

تعریف ۱ـ۲ـ۹ـ سیگنال کنترلی که در تمام مدت $[t_0, t_f]$ در محدودیت‌های کنترل صدق نماید به کنترل قابل قبول [2] معروف می‌باشد.

تعریف ۱ـ۲ـ۱۰ـ منحنی مسیر متغیر وضعیت که در مدت زمان $[t_0, t_f]$ در محدودیت‌های متغیر وضعیت صدق نماید، منحنی مسیر قابل قبول [3] نامیده می‌شود.

تعریف ۱ـ۲ـ۱۱ـ کنترل قابل قبول u^* که باعث می‌شود سیستم $x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$ مسیر قابل قبول x^* را تعقیب نموده و تابعی زیر را حداقل نماید، را کنترل بهینه و منحنی مسیر قابل قبول را منحنی مسیر بهینه می‌نامند.

$$J = J(x(k_0), u(k_0), k_0) = S(x(k_f), k_f) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} V(x(k), u(k), k).$$

تعریف ۱ـ۲ـ۱۲ـ شاخص عملکرد بصورت تابعی از یک یا چند تابع می‌باشد که به آن تابعی معیار گفته می‌شود و آن را با J نشان می‌دهیم، در واقع یک تابعی، ممکن است به یک یا چندین تابع وابسته باشد همانند تابعی J که به توابع کنترل و حالت وابسته می‌باشد.

تعریف ۱ـ۲ـ۱۳ـ تابعی معیار به سه صورت در مسایل کنترل بهینه ظاهر می‌شود، اگر تابعی عملکرد تنها شامل هزینه نهایی یعنی $J = S(x(k_f), k_f)$ باشد به مساله مایر [4] معروف است، اگر تنها شامل قسمت $J = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} V(x(k), u(k), k)$ باشد به آن مساله لاگرانژ [5] می‌گویند و بالاخره اگر بصورت کلی

$$J = J(x(k_0), k_0) = S(x(k_f), k_f) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} V(x(k), u(k), k),$$

باشد به آن مساله بولزا [6] گفته می‌شود.

[1] Control history [2] Admissible control [3] Admissible trajectory [4] Mayer problem [5] Lagrange problem [6] Bolza problem

تعریف ۱ـ۲ـ۱۴ـ سیستم $x(k+۱) = Ax(k) + Bu(k)$ را کاملا کنترل‌پذیر گوییم هر گاه سیگنال uیی وجود داشته باشد به‌طوری‌که بتوان حالت سیستم را از هر حالت اولیه $x(k_۰)$ در زمان $k_۰$ به هر حالت نهایی $x(k_f)$ در زمان $k_f - k_۰$ انتقال دهیم که معادل با قابل دسترس بودن سیستم می‌باشد. بعبارتی باید ماتریس زیر دارای رتبه کامل باشد و یا نامنفرد (وارون پذیر) باشد.

$$[B|AB|A^۲B|\dots|A^{n-۱}B].$$

تعریف ۱ـ۲ـ۱۵ـ نمو تابعی J را با ΔJ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Delta J \triangleq J(x(k) + \delta x(k)) - J(x(k)).$$

در تعریف فوق $\delta x(k)$ را تغییرات تابع $x(k)$ می‌گویند. چون نمو تابعی هم به تابع $x(k)$ و هم به تغییرات آن یعنی $\delta x(k)$ بستگی دارد، می‌توان آن را به‌صورت $\Delta J(x(k), \delta x(k))$ نوشت. با استفاده از بسط تیلور $J(x(k), \delta x(k))$ حول تابع $x(k)$ به رابطه زیر برای ΔJ می‌رسیم:

$$\begin{aligned}\Delta J &= J(x(k)) + \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)\delta x(k) + \left(\frac{\partial^۲ J}{\partial x^۲}\right)(\delta x(k))^۲ + \dots - J(x(k)) \\ &= \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)\delta x(k) + \left(\frac{\partial^۲ J}{\partial x^۲}\right)(\delta x(k))^۲ + \dots = \delta J + \delta^۲ J,\end{aligned}$$

در رابطه فوق δJ تغییرات اول و $\delta^۲ J$ تغییرات دوم تابعی J بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta J = \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)\delta x(k),$$

$$\delta^۲ J = \left(\frac{\partial^۲ J}{\partial x^۲}\right)(\delta x(k))^۲.$$

تغییرات δJ تابعی J قسمت خطی (یا تخمین مرتبه اول) نمو ΔJ نسبت به $\delta x(k)$ است.

تعریف ۱ـ۲ـ۱۶ـ یک تابعی J دارای یک منحنی اکسترمم نسبی در x^* است اگر یک $\epsilon > ۰$ وجود داشته باشد که به ازاء هر x از دامنه تابعی که در رابطه $\|x - x^*\| < \epsilon$ صدق می‌کند، نمو J دارای علامت ثابت باشد. اگر $\Delta J = J(x) - J(x^*) \geq ۰$، $J(x^*)$ حداقل نسبی و اگر $\Delta J = J(x) - J(x^*) \leq ۰$، $J(x^*)$ حداکثر نسبی است. اگر روابط بالا برای یک $\epsilon > ۰$ اختیاری بزرگی صادق باشد، آنگاه $J(x^*)$ مقدار بهینه سراسری مطلق می‌گویند.

مشابه یافتن مقدار بهینه توابع، برای مسایل تغییراتی مربوط به تابعی‌ها، تغییرات اول باید روی منحنی بهینه صفر باشد. اکنون نتایج را با یک قضیه بیان می‌کنیم که به قضیه اساسی حساب تغییرات [۱] معروف است و اثبات آن در کتاب‌های مربوط به حساب تغییرات موجود است.

[۱] Fundamental theorem of calculus of variations

قضیه ۱ـ۲ـ۱ـ برای اینکه منحنی $x^*(k)$ به‌عنوان یک نامزد بهینگی باشد، تغییرات (اول) تابعی J باید روی $x^*(k)$ صفر باشد. به‌عبارتی، برای تمام مقادیر مجاز $\delta x(k)$ باید $\delta J(x^*(k), \delta^* x(k)) = ۰$ باشد. این شرط، یک شرط لازم است. شرط کافی برای حداقل بودن این است که تغییرات دوم مثبت باشد، به‌عبارتی، $\delta^۲ J > ۰$ و برای حداکثر بودن باید $\delta^۲ J < ۰$ باشد.

فصل ۲:

مباني و مرور ادبيات مساله

۲ـ۱ـ مقدمه

هدف نهايي در طراحی سيستم‌هاي كنترل به‌دست‌آوردن كنترل‌كننده‌اي است كه باعث عملكرد مطلوب سيستم مي‌شود. عملكرد مطلوب سيستم معمولا برحسب مشخصه‌هاي زماني نظير زمان صعود، زمان قرار، حداكثر جهش، و يا برحسب مشخصه‌هاي فركانسي نظير حد فاز، حد دامنه و پهناي باند بيان مي‌شود. روش‌هاي متعارف طراحي سيستم‌هاي كنترل، معمولا روش‌هاي سعي و خطا مي‌باشند، كه در آنها براي تعيين پارامترهاي طراحي يك سيستم مورد قبول، روش‌هاي مختلف تحليل، به‌طور تكراري [۱] مورد استفاده قرار مي‌گيرند. با روش سعي و خطا، يا يك كنترل‌كننده قابل قبول به‌دست مي‌آيد و يا طراح نتيجه مي‌گيرد كه مشخصات مورد لزوم نحوه عملكرد، نمي توانند مصداق پيدا كنند. اما مسايل پيچيده زيادي قابل حل با روش‌هاي متعارف نيستند. به‌عنوان مثال ، طراحي سيستم كنترل موقعيت هواپيما كه مصرف سوخت را نيز حداقل كند، با استفاده از روش‌هاي متعارف امكان پذير نمي‌باشد. روش جديد و مستقيم طراحی چنين سيستم‌هاي پيچيده‌اي، كه كنترل بهينه [۲] ناميده مي‌شود، با توسعه كامپيوترهاي ديجيتال امكان پذير شده‌است. هدف كنترل بهينه، تعيين سيگنال‌هاي كنترلي است به‌طوري‌كه یک مجموعه از قيود و محدوديت‌ها توسط یک فرآيند ديناميكي برآورده شده و به‌طور همزمان، یک يا چندين معيار عملكرد [۳] ، حداقل (يا حداكثر) شود.

۲ـ۲ـ حساب تغییرات

بر اساس افسانه‌ها [۱۲] پرنسس صوری دیدو [۴] یک طناب ساخته شده از چرم را به‌شکل یک کمان دایره‌ای برای حداکثر کردن مساحت محصور شده، جهت تاسیس شهر کارتاژ [۵] مورد استفاده قرار داده است. اگر چه داستان تاسیس شهر کارتاژ ساختگی است، ولی احتمالا رشته جدیدی در علم ریاضی با نام حساب تغییرات و گسترش‌های آن مانند تئوری کنترل بهینه از آن الهام گرفته شده‌است.

حساب تغییرات شاخه‌ای از ریاضیات است که در مورد یافتن یک تابع که یک تابعی [۶] را حداکثر یا حداقل [۷] می‌نماید، بحث می‌کند. یک تابعی بطور ساده به‌صورت تابعی از یک تابع تعریف می‌شود. تئوری یافتن حداکثر یا حداقل توابع، کاملا قدیمی بوده و می‌توان در مسایل ایزوپری‌متریک [۸] بررسی شده توسط ریاضیدانان یونانی مانند زنودروس [۹] (۴۳۵ـ۴۹۵ قبل از میلاد) و پوپوس [۱۰] (۲۹۰ـ۳۵۰ قبل از میلاد) آن را مشاهده کرد. ولی ما با کارهای برنولی [۱۱] آن را می‌شناسیم. در سال ۱۶۹۹ ژوهانس برنولی (۱۶۶۷ـ۱۷۴۸) مساله براچیستوچرانه [۱۲] را مطرح کرد: مساله یافتن کوتاهترین مسیر بین دو نقطه که در یک خط عمودی یا افقی قرار ندارند. این مساله که ابتدا بوسیله گالیله [۱۳] (۱۵۶۴ـ۱۶۴۲) در سال ۱۶۳۸ مطرح شد، بوسیله جان برنولی [۱۴]، برادرش ژاکوب [۱۵] (۱۶۵۴ـ۱۷۰۵)، گاتفرید لیبنیز

[۱] Iterative [۲] Optimal control [۳] Performance index [۴] Tyrian Princess Dido [۵] Carthage
[۶] Functional [۷] Extremum [۸] Isoperimetric [۹] Zenodorus [۱۰] Poppus [۱۱] Bernoulli
[۱۲] Brachistochrone problem [۱۳] Galilei [۱۴] John Bernoulli [۱۵] Jacob

[1] (۱۶۴۶–۱۷۱۶) و ایساک نیوتن [2] (۱۶۴۲–۱۷۲۷) حل شد. لئونارد اویلر [3] (۱۷۰۷–۱۷۸۳) با پیوستن به تیم جان برنولی سهم قابل توجهی در توسعه آن داشت، و ژوزف لوییس لاگرانژ [4] (۱۷۳۶–۱۸۱۳) را تحت تاثیر قرار داد، کسی که نهایتا روش ممتازی برای حل این نوع از مسایل به‌شیوه (اولین) تغییرات را ارایه کرد. این کارها، اویلر را به ابداع اصطلاح حساب تغییرات سوق داد. بعدها این شرایط لازم برای بهینگی تابعی‌ها، معادله اویلر–لاگرانژ نامیده شد. لاگرانژ با کار روی مسایل با نقاط انتهایی متغیر، روش ضرب‌کننده‌ها را ابداع کرد که بعدها یکی از قویترین ابزارها، ضرب‌کننده‌های لاگرانژ (یا اویلر–لاگرانژ) در بهینه‌سازی شدند. شرایط کافی برای یافتن مقدار بهینه تابعی‌ها در حساب تغییرات بوسیله آندرین ماری لژاندر [5] (۱۷۵۲–۱۸۳۳) در سال ۱۷۸۶ با در نظر گرفتن تغییرات دوم ارایه شد. کارل گاستاو ژاکوب ژاکوبی [6] (۱۸۰۴–۱۸۵۱) در سال ۱۸۳۶ تحلیل محکم‌تری برای شرایط کافی بیان کرد. این شرایط کافی بعدا با نام شرایط لژاندر–ژاکوبی مطرح شد.

تقریبا به‌طور همزمان هامیلتون [7] (۱۷۸۸–۱۸۵۶) کارهای مهمی در مکانیک انجام داد، او نشان داد حرکت یک ذره در فضا تحت نیروهای مختلف خارجی را می‌توان با یک تابع که در دو معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول صدق می‌کند، بیان کرد. در سال ۱۸۳۸ ژاکوبی ایراداتی به این کار گرفت و نشان داد فقط یک معادله دیفرانسیل جزئی لازم است. این معادله را "معادله هامیلتون–ژاکوبی" نامیدند، که بعدا تاثیر عمیقی روی حساب تغییرات و برنامه‌ریزی پویا، کنترل بهینه و مکانیک گذاشت. رودلف کلبش [8] (۱۸۳۳–۱۸۷۲) و آدولف مایر [9] شرایط برای دسته جامع‌تری از مسایل را مطرح کردند. کلبش یک مساله در حساب تغییرات با الحاق شرایط قیدی به‌شکل معادلات دیفرانسیل تدوین کرد و یک شرط بر اساس تغییرات دوم ارایه کرد. در سال ۱۸۶۸ مایر کار کلبش را مجددا بررسی کرده و نتایج شاخصی برای مساله جامع حساب تغییرات ارایه کرد. مایر بعدها "مساله لاگرانژ" را در سال ۱۸۷۸ و "مساله مایر" را در سال ۱۸۹۵ با جزئیات تشریح کرد.

در ۱۸۹۸، آدولف کنسر [10] روش جدیدی در حساب تغییرات با استفاده از نتایج کارل گاوس [11] (۱۷۷۷–۱۸۵۵) روی ژئودزیکس [12]، برای مسایل نقطه انتهایی متغیر ارایه کرد. او با همکاری اسکار بولزا [13] (۱۸۵۷–۱۹۴۲) نتایج شایسته‌ای برای این مسایل ارایه کرد.

در بین سال‌های ۱۹۰۸ تا ۱۹۱۰، گیلبرت بلیس [14] (۱۸۷۶–۱۹۵۱) [۴] و ماکس میسون [15] نگاه عمیقی بر نتایج کنسر داشتند. بولزا در ۱۹۱۳ "مساله بولزا" را به‌عنوان تعمیمی از مساله لاگرانژ و مایر تدوین کرد. بلیس نشان داد که هر سه این مسایل معادل هستند [۱۴].

---

[1] Gottfried Leibniz [2] Issac Newton [3] Leonard Euler [4] Joseph-Louis Lagrange [5] Andrien Marie Legendre [6] Carl Gustav Jacob Jacobi [7] Sir William Roman Hamilton [8] Rudolph Clebesh [9] Adolph Mayer [10] Adolf kneser [11] Karl Gauss [12] Geodesics [13] Oskar Bolza [14] Gilbert Bliss [15] Max Mason

۲ـ۳ـ تئوری کنترل بهینه

مساله کنترل خطی مربعی ابتدا بوسیله واینر [1] روی فیلترهای میانگین مربعات برای کنترل آتش جنگ‌افزارها در جنگ جهانی دوم (۱۹۴۰ـ۱۹۴۵) ارایه شد [۱۸؛ ۱۹]. واینر مساله طراحی فیلترهایی را که معیار میانگین مربعات خطای (شاخص عملکرد) زیر را حداقل می‌کردند، حل کرد:

$$J = E\{e^2(t)\},$$

که $e(t)$ خطا و $E\{x\}$ امید ریاضی متغیر تصادفی x است. برای حالت قطعی، معیار خطای فوق به‌صورت انتگرالی مربعی زیر تعمیم می‌یابد:

$$J = \int_0^\infty e'(t)Qe(t)dt,$$

که Q یک ماتریس مثبت معین است. بلمن در سال ۱۹۵۷ تکنیک برنامه‌ریزی پویا [2] را برای حل مسایل کنترل بهینه گسسته‌زمانی مطرح کرد [۱]. ولی مهمترین کار در سیستم‌های کنترل بهینه توسط پونتریاگین [3] و همکارانش در سال ۱۹۵۶ با نام اصل حداکثر [4] بیان شد [۵] و در کتاب آنها با جزئیات ارایه شده است [۱۵]. همچنین، مقاله جالب "کشف اصل حداکثر" که نویسنده آن گامکرلیدز [5] [۷] یکی از نویسندگان کتاب اصلی [۱۵] است، را ببینید. در این زمان در ایالات متحده، کالمن در سال ۱۹۶۰ تئوری تنظیم‌کننده خطی مربعی [6] (LQR) و تئوری گوسین خطی مربعی [7] (LQG) را برای کنترل فیدبک بهینه ارایه کرد [۱۰]. او فیلتر بهینه و تئوری تخمین را ارایه کرد، که به فیلتر کالمن گسسته معروف او [۱۱] و فیلتر کالمن پیوسته او و باسی [8] [۹] منتهی شد. کالمن تاثیر عمیقی روی تئوری کنترل بهینه داشت و فیلتر کالمن یکی از پراستفاده‌ترین تکنیک‌های کاربرد تئوری کنترل بهینه در دنیای واقعی و در حوزه‌های مختلف است.

در اینجا اشاره‌ای به معادله ماتریسی ریکاتی [9] می‌کنیم که در تکنیک‌های فیلتر کالمن و بسیاری حوزه‌های دیگر ظاهر می‌شود. ریکاتی نتایج کار خود را در سال ۱۷۲۴ برای حل برخی معادلات دیفرانسیل غیرخطی ارایه کرد [۱۶؛ ۳] بدون اینکه بداند معادله ریکاتی پس از حدود دو قرن بعد بسیار معروف می‌شود.

بنابراین، کنترل بهینه، ریشه در حساب تغییرات ایجاد شده در قرن‌های ۱۶ و ۱۷ میلادی داشته و در حدود ۳۰۰ سال قبل متولد شده است [۱۷]. برای جزئیات بیشتر در مورد تاریخچه حساب تغییرات و کنترل بهینه، می‌توانید به مطالب گران‌بهای مراجع [۲؛ ۶؛ ۸؛ ۱۳؛ ۱۷] مراجعه کنید. در کنترل خطی مربعی، عبارت "خطی" به معنی این است که فرآیند خطی است و عبارت "مربعی" بدین معنی است که

[1] N. Wiener [2] Dynamic programming [3] Pontryagin [4] Maximum principle [5] R. V. Gamkrelidze
[6] Linear quadratic regulator [7] Linear quadratic gaussian [8] Bucy [9] Matrix Riccati Equation

شاخص عملکرد شامل توان دوم یا مربع خطا و یا کنترل است. در ابتدا این مساله را "مساله کنترل میانگین مربعی [1] می‌گفتند و عبارت "خطی مربعی" تا سال ۱۹۵۰ در متون مربوطه وجود نداشته است.

[1] Mean-squared control problem

پیوست‌ها

مراجع

[1] Bellman, Richard. Dynamic programming, princeton univercity press. *Princeton, NJ*, 1957.

[2] Bittanti, S. History and prehistory of the riccati equation. In *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1599–1604, Kobe, Japan, December 1996. IEEE.

[3] Bittanti, Sergio, Laub, Alan J., and Willems, Jan C. *The Riccati Equation.* Springer-Verlag, New York, NY, 1991.

[4] Bliss, Gilbert A. Lectures on the calculus of variations. 1946.

[5] Boltyanskii, Vladimir Grigorevich, Pontryagin, Lev Semenovich, and Gamkrelidze, Revaz Valer'yanovich. On the theory of optimal processes. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR (in Russian)*, volume 110, pages 7–10, 1956.

[6] Bryson, A.E. Optimal control-1950 to 1985. *Control Systems*, 16(3):26–33, June 1996.

[7] Gamkrelidze, R. V. Discovery of the maximum principle. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 5(4):437–451, 1999.

[8] Goldstine, Herman H. *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century.* 1980.

[9] Kalman, R. E. and Bucy, R. S. New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering*, 83(1):95–107, march 1961.

[10] Kalman, Rudolf Emil. Contributions to the theory of optimal control. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 5(2):102–119, 1960.

[11] Kalman, Rudolph Emil. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1):34–45, march 1960.

[12] Leitmann, George. *The Calculus of Variations and Optimal Control.* Springer US, 1981.

[13] McShane, E. J. The calculus of variations from the beginning through optimal control theory. *Journal of Control and Optimization*, 27(5):916–939, September 1989.

[14] Naidu, Desineni Subbaram. *Optimal Control Systems*. CRC Press, oct 2002.

[15] Pontryagin, LS, Boltyanskii, VG, Gamkrelidze, RV, and Mishchenko, EF. The mathematical theory of optimal processes, 1962.

[16] Riccati, C. Jacobo. Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus. *Acta Eruditorum Lipsiae*, 8:23–67, 1724.

[17] Sussmann, H.J. and Willems, J.C. 300 years of optimal control: from the brachystochrone to the maximum principle. *Control Systems Magazine*, 17(3):32–44, June 1997.

[18] Wiener, Norbert. Cybernetics. 1948.

[19] Wiener, Norbert. *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*. The MIT Press, 1964.

Abstract

yes

Keywords:

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirement for the Degree of Doctor

of Philosophy in

Supervisor:

Advisor: