فهرست مطالب

فصل اوّل شامل مقدمه و تعاریف پایه ای موردنیاز در فصول آینده است.

مرجع اصلی مقاله

"Tripled Best Proximity Point Metric Spaces Mathematical Inequalities Applications, Volume 16, Number 4 (2013),1197-1216".

Yeol Je Cho, Animesh Gupta, Erdal Karapinar, Poom Kumam, Wutiphol sintunavart

در فصل دوم تعاریف و قضایای اصلی نقطه بهترین تقریب سه تایی و زوج انقباض های دوری در فضای متریک و فضای متریک کامل با ویژگی های UC و UC* را مورد بررسی و اثبات قرار می دهیم.

در فصل سوم قضیه بهترین نقطه ثابت سه تایی در فضای متریک و نتایج حاصل از آن را بیان می کنیم.

فصل ۱

پیش نیازها و تعاریف مقدماتی

در این فصل نمادها، تعریف پایه ای، قضایایی که در سراسر این پایان نامه از آنها استفاده می شود، معرفی می نماییم. منظور از N مجموعه اعداد صحیح مثبت و منظور از R مجموعه اعداد حقیقی است.

۱.۱ تعاریف مقدماتی

۲.۱ فضای متریک

یک متریک روی مجموعه ناتهی X تابعی مانند $d : X \times X \to R$ است که در سه ویژگی زیر صدق کند:

الف) به ازای هر $x, y \in X$ داریم $d(x,y) \geq \circ$ $d(x,y) = \circ \Leftrightarrow x = y,$

ب) به ازای هر $x, y \in X$ داریم $d(x,y) = d(y,x)$

ج) به ازای هر $x, y, z \in X$ داریم $d(x,y) \leq d(x,z) + (z,y)$

جفت مرتب [۲] (X, d) را یک فضای متریک می نامیم.

۳.۱ قطر مجموعه[۳]

قطر یک مجموعه $A \subseteq X$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$diam(A) = \sup\{d(a,b)/a, b \in A\}$$

[۲]Ordered pair
[۳]diameter=diagonal

مثال ۱. *در فضای اقلیدس R [1] قطر مجموعه A به صورت زیر تعریف می شود:*

$$diam(a, b) = b - a$$

۴.۱ مجموعه محدب[2]

مجموعه $A \subseteq R^k$ محدب است هرگاه پاره خط واصل بین هر دو نقطه مجموعه A درون A قرار گیرد به زبان دیگر به ازای هر $a, b \in A$ و $t \in (۰, ۱)$ داشته باشیم

$$ta + (۱ - t)b \in A$$

مثال ۲. *مجموعه $A \subseteq R$ را محدب گویند اگر و تنها اگر بصورت بازه باشد. بازه بصورت*

$$(a, b), [a, b), [a, b], (a, b]$$

$$(a, b) = \{tb + (۱ - t)a / t \in (۰, ۱)\}$$

۵.۱ مجموعه فشرده[3]

فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد زیر مجموعه $K \subseteq X$ را فشرده می نامیم هرگاه هر پوشش[4] باز K مانند F دارای زیر پوشش متناهی باشد به زبان ریاضی اگر $F = \{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ پوشش باز دلخواهی از مجموعه K باشد آنگاه

$$\exists \alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_n \in I$$

$$\exists K \subseteq M_{\alpha_۱} \cup M_{\alpha_۲} \cup ... \cup M_{\alpha_n}$$

مثال ۳. *هر مجموعه متناهی فشرده است.*

مثال ۴. *فرض کنیم $K = \{\frac{۱}{n} \mid n \in N\} \cup \{۰\}$ در فضای R مجموعه ای فشرده است.*

---

[1] Euclid
[2] convex set
[3] compact set
[4] cover

۶.۱ فضای برداری[۱]

یک فضای برداری مجموعه ای مانند V متشکل از عناصری است که بردار نامیده می شود و اعمال جمع و ضرب اسکالری بر آن تعریف شده و در شرایط ذیل صدق می کنند و u و v و w عناصر دلخواه V و c و d عناصر اسکالر هستند.

۱ ـ V تحت جمع بسته است.

۲ ـ V تحت ضرب اسکالر بسته است.

۳ـ ویژگی جابجایی $u+v=v+u$

۴ـ ویژگی شرکت پذیری $u+(v+w)=(u+v)+w$

۵ـ $u+۰=u$

۶ـ $u+(-u)=۰$

۷ـ $c(u+v)=cu+cv$

۸ـ $(c+d)u=cu+du$

۹ـ $c(du)=cdu$

۱۰ـ $۱u=u$

۷.۱ فضای توپولوژی[۲]

گردآیه τ از زیر مجموعه های مجموعه X را یک توپولوژی در X گوییم اگر τ از سه خاصیت زیر بهره مند باشد.

الف) $\phi \in \tau$ و $X \in \tau$

ب) هرگاه به ازای $i=۱,۲,۳,...,n$ و $V_i \in \tau$ آنگاه $V_۱ \cap V_۲ \cap \cap ... \cap V_n \in \tau$

ج) هر گاه $\{V_\alpha\}$ گردآیه دلخواهی از اعضای τ (متناهی، شمارش پذیر یا شمارشناپذیر) باشد آن گاه $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$

[۱] Vector
[۲] Topology space

هرگاه τ یک توپولوژی در X باشد آن گاه X را یک فضای توپوژیک و اعضای τ را مجموعه های باز در X گویند.

هرگاه X و Y دو فضای توپولوژیک بوده و f نگاشتی از X به توی Y باشد آن گاه گوییم f پیوسته است. اگر به ازای هر مجموعه باز V در Y، $f^{-1}(V)$ مجموعه بازی در X باشد.

۸.۱ فضای هاسدورف[1]

X یک فضای هاسدورف است در صورتی که شرط زیر برقرار باشد. هرگاه $p, q \in X$ و $p \neq q$ آنگاه p همسایگی مانند U و q همسایگی مانند V داشته باشد به طوری که $V \cap U = \emptyset$ یا به عبارتی

$$U_r(p) \cap V_{r'}(q) = \emptyset$$

۹.۱ فضای برداری نرم دار[2]

تابع حقیقی $\|\cdot\|$ را که روی فضای برداری X تعریف شده است یک نرم می نامیم هرگاه در سه ویژگی زیر صدق کند.

۱ـ به ازای هر $x \in X$ و $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و فقط $x = 0$

۲ـ به ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in R$ و $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

۳ـ به ازای هر $x, y \in X$ و $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

۱۰.۱ متریک القایی

روی فضای برداری نرم دار X با استفاده از تابع $d(x, y) = \|x - y\|$ متریکی برحسب نرم تعریف می کنیم متریک را متریک القایی به وسیله نرم می نامیم.

[1] Hausdorf
[2] Norm vecto space

۱۱.۱ فضای باناخ[1]

هر فضای نرم دار مانند X را که نسبت به متریک القایی به وسیله نرم فضایی کامل باشد یک فضای باناخ می نامیم.

۱۲.۱ دنباله حقیقی همگرا[2]

دنباله حقیقی $\{x_n\}$ به $x \in R$ همگراست هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند n_0 (وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که اگر $n > n_0$ آن گاه $|x_n - x| < \varepsilon$

عدد حقیقی x را حد دنباله $\{x_n\}$ می نامیم و می نویسیم $x_n \to x$ یا $\lim_{x\to\infty} x_n = x$

هر دنباله از اعداد حقیقی حداکثر یک حد دارد.

۱۳.۱ دنباله کوشی [3]

دنباله حقیقی $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند n_0 (وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که اگر $m > n_0$ و n آنگاه $|x_n - x_m| < \varepsilon$ هر دنباله کوشی لزوماً کراندار نیز است.

۱۴.۱ فضای متریک کامل[4]

فضایی که هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

تعاریف بهترین پایه تقریبی سه تایی

۱۵.۱ فاصله بین دو مجموعه A, B

برای زیر مجموعه های ناتهی A و B از فضای متریک (X, d) قرار می دهیم.

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

[1] Banach space
[2] convergent
[3] Cauchy Sequence
[4] complete metric space

که این بیانگر فاصله میان A, B است.

۱۶.۱ تابع محدب

تابع پیوسته $f : R \to R$ را در بازه $[a, b]$ محدب گویند. اگر با فرض این که اعداد مثبت $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ دارای مجموع واحد باشند، داشته باشیم:

$$\alpha_۱ + \alpha_۲ = ۱$$

$$\alpha_۱ f(x) + \alpha_۲ f(y) \geq f(\alpha_۱ x + \alpha_۲ y)$$

با فرض $\alpha_۱, \alpha_۲ = \frac{۱}{۲}$ و هر $x, y \in [a, b]$ داریم

$$\frac{f(x) + f(y)}{۲} \geq f(\frac{x + y}{۲})$$

۱۷.۱ یکنواخت محدب بودن[۱]

برای هر ε با فرض $۲ \leq \varepsilon > ۰$ و $۰ > \delta$ چنان موجود باشد که شرایط زیر برقرار شود.

$$\|x\| \leq ۱, \|y\| \leq ۱, \|x - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \|\frac{x + y}{۲}\| < ۱ - \delta$$

براحتی دیده می شود که یک فضای باناخ محدب یکنواخت X اکیداً محدب است اما عکس حکم برقرار نیست.[۹،۳۲]

۱۸.۱ به‌طور اکید محدب بودن[۲]

هرگاه برای هر $x, y \in X$

$$\|x\| = \|y\| = ۱, x \neq y \Rightarrow \|\frac{x + y}{۲}\| < ۱$$

[۱] uniformly convex
[۲] strictly convex

۱۹.۱ خاصیت UC

فرض کنید A, B زیر مجموعه های ناتهی از فضای متری (X, d) باشند، گوییم زوج مرتب (A, B) خاصیت UC می باشد هرگاه اگر $\{z_n\}$ و $\{x_n\}$ دنباله هایی در A و $\{y_n\}$ دنباله ای در B باشد بطوری که

$$\begin{matrix} d(x_n, y_n) \to d(A, B) \\ d(z_n, y_n) \to d(A, B) \end{matrix} \implies d(x_n, z_n) \to 0$$

مثال ۵. *فرض کنید A, B مجموعه های ناتهی از فضای متریک (X, d) باشند گزاره های زیر نمونه هایی از زوج های زیر مجموعه های ناتهی (A, B) هستند که واجد شرایط UC هستند.*

الف) زوج (A, B) از زیر مجموعه های ناتهی A, B در فضای متریک هستند به طوری که $d(A, B) = 0$

ب) زوج (A, B) از زیر مجموعه های ناتهی A, B از یک فضای باناخ محدب یکنواخت X هستند به طوری که A محدب باشد.

ج) زوج (A, B) از زیر مجموعه های ناتهی A, B از یک فضای باناخ اکیداً محدب هستند به طوری که A محدب و نسبتاً فشرده و بستار [۱] B فشرده ضعیف[۲] باشد.

۲۰.۱ خاصیت $UC*$

[۳۲] فرض کنید A, B مجموعه های ناتهی از فضای متریک (X, d) باشد، گوییم زوج مرتب (A, B) دارای ویژگی UC^* است اگر (A, B) دارای ویژگی UC باشد و نیز هرگاه:

اگر $\{x_n\}$ و $\{z_n\}$ دو دنباله در A و $\{y_n\}$ دنباله ای در B باشد که

الف) $d(z_n, y_n) \to d(A, B)$

ب) برای هر $\varepsilon > 0$ و $N \in N$ موجود باشد که برای هر $m > n \geq N$ داشته باشیم

$$d(x_m, y_n) \leq d(A, B) + \varepsilon$$

در این صورت $N_1 \in N$ چنان موجود است که برای هر $m > n \geq N_1$

$$d(x_m, z_n) \leq d(A, B) + \varepsilon$$

[۱] Closure

[۲] Weakly compact

مثال ۶. *فرض کنید A, B زیرمجموعه هایی ناتهی از فضای متریک (X, d) باشند گزاره های زیر نمونه هایی از زوج های زیر مجموعه های ناتهی (A, B) هستندکه دارای ویژگی UC^* می باشند.*

الف) زوج (A, B) از زیر مجموعه های ناتهی A و B از فضای متریک (X, d) هستند که $d(A, B) = 0$

ب) زوج (A, B) از زیر مجموعه های بسته ناتهی A, B از فضای باناخ محدب یکنواخت X به طوری که A محدب باشد.

۲۱.۱ نقطه بهترین تقریب T

فرض کنید A, B زیر مجموعه های ناتهی از فضای متریک (X, d) و $T : A \to B$ یک نگاشت باشد نقطه $x \in A$ یک نقطه بهترین تقریب T نامیده می شود اگر شرط زیر برقرار شود

$$d(x, Tx) = d(A, B)$$

می توان ملاحظه کرد که یک نقطه بهترین تقریب قابل کاهش[۱] به یک نقطه ثابت است اگر نگاشت مربوطه خود نگاشت[۲] باشد.

فرض کنید A یک زیر مجموعه ناتهی از فضای متریک (X, d) و $F : A^3 \to A$ یک نگاشت باشد نقطه $(x, y, z) \in A^3$ یک نقطه ثابت سه تایی F خوانده می شود اگر شرایط زیر برقرار باشد.[۹]

$$x = F(x, y, z) \qquad y = F(y, x, z) \qquad z = F(z, y, x)$$

۲۲.۱ قضیه نقطه ثابت باناخ [۴]

فرض می کنیم (X, d) فضای متریک کامل $f : X \to X, \alpha < 1$ تابعی باشد که برای آن داشته باشیم.

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \forall x, y \in X$$

در این صورت f یک نقطه ثابت منحصر بفرد دارد.

[۱] point reduces
[۲] self - mapping

فصل ۲

نقطه بهترین تقریب سه تایی

در این بخش به بررسی وجود همگرایی نقاط بهینه تقریبی سه تایی برای زوج های انقباض دوری در فضاهای متری می پردازیم.

۱.۲ نقطه بهترین تقریب سه تایی

فرض کنید A, B زیر مجموعه های ناتهی از فضای متریک (X, d) و $F : A^{۳} \to B$ یک نگاشت باشد. سه تایی مرتب $(x, y, z) \in A^{۳}$ یک نقطه بهترین تقریب سه تایی است اگر

$$d(x, F(x, y, z)) = d(y, F(y, x, z)) = d(z, F(z, y, x)) = d(A, B)$$

اگر $A = B$ در رابطه بالا برقرار شود یک نقطه بهترین تقریب سه تایی قابل کاهش به یک نقطه ثابت سه تایی است.

۲.۲ زوج مرتب (A, B) انقباض دوری

فرض کنید A, B زیر مجموعه های ناتهی از فضای متریک (X, d) و $F : A^{۳} \to B$ و $G : B^{۳} \to A$ دو نگاشت باشند. زوج مرتب (F, G) یک انقباض دوری نامیده می شوند اگر عدد نامنفی $\alpha < ۱$ چنان موجود باشد که برای هر $(x, y, z) \in A^{۳}$ و $(u, v, w) \in B^{۳}$ داشته باشیم

$$d(F(x, y, z), G(u, v, w)) \leq \frac{\alpha}{۳}[d(x, u) + d(y, v) + d(z, w)] + (۱ - \alpha)d(A, B)$$

توجه کنید اگر (F, G) انقباض دوری باشد در این صورت زوج (G, F) نیز انقباض دوری است.

مثال ۷. *فرض کنید* $X = R$ *با متر معمولی* $d(x, y) = |x - y|$ *و فرض کنید* $A = [۲, ۶]$ *و* $B = [-۶, -۲]$ *به آسانی دیده می شود که* $d(A, B) = ۶ - ۲ = -۲ - (-۶) = ۴$ *نگاشت های* G, F *را تعریف می کنیم* $F : A^{۳} \to B$ *و* $G : B^{۳} \to A$ *برای هر* $(x, y, z) \in A^{۳}$ *و*

$(u,v,w) \in B^۳$ و $\alpha = \frac{۱}{۲}$ بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
&F(x,y,z) = \frac{-x-y-z-۶}{۶}\\
&G(u,v,w) = \frac{-u-v-w+۶}{۶}\\
&d(F,G) = |\frac{-x-y-z-۶}{۶} - \frac{-u-v-w+۶}{۶}|\\
&= |\frac{-x-y-z-۶}{۶} - ۱ - \frac{-u-v-w+۶}{۶} - ۱|\\
&\leq \frac{|x-u|+|y-v|+|z-w|}{۶} + ۲\\
&= \frac{\frac{۱}{۲}}{۳}[d(x,u)+d(y,v)+d(z,w)] + (۱-\frac{۱}{۲})d(A,B)\\
&= \frac{\alpha}{۳}[d(x,u)+d(y,v)+d(z,w)] + (۱-\alpha)d(A,B)
\end{aligned}$$

بنابراین (F,G) یک زوج انقباض دوری با فرض $\alpha = \frac{۱}{۲}$ است.

مثال ۸. فرض کنید $X = R^۳$ با متر

$$d((x,y,z),(u,v,w)) = \max\{|x-u|,|y-v|,|z-w|\}$$

برای هر $(x,y,z),(u,v,w) \in X$ و فرض کنید

$$A = \{(x,۰,۰) \in X : ۰ \leq x \leq ۱\}$$

$$B = \{(x,۱,۱) \in X : ۰ \leq x \leq ۱\}$$

براحتی می توان ثابت کرد که $d(A,B) = ۱$

مثال ۹. فرض کنیم $X = R$ یک فضای باناخ محدب یکنواخت باشد با نرم معمولی و فرض کنیم $A = [۱,۳]$ و $B = [-۳,-۱]$ و $d(A,B) = ۲$ تعریف می کنیم نگاشت های $F : A^۳ \to B$ و $G : B^۳ \to A$ با ضابطه های

$$\begin{aligned}
&F(x,y,z) = \frac{-x-y-z-۳}{۶}\\
&G(x,y,z) = \frac{-u-v-w+۳}{۶}
\end{aligned}$$

برای هر $(x,y,z) \in A^۳$ و $(u,v,w) \in B^۳$ و فرض $\alpha = \frac{۱}{۲}$ و $d(a,b) = |b-a|$

تساوی بالا بدست می‌آید.