فصل ۱

استنباط بیزی درباره شاخص عملکرد طول عمر بر اساس داده های فزاینده نوع ۲ در توزیع وایبل

۱.۱ معرفی توزیع وایبل

توزیع وایبل در زمینه های گوناگونی از موارد کاربردی مورد استفاده قرار می گیرد، مخصوصاً به عنوان یک مدل مناسب برای مدل بندی طول عمر محصولات در صنعت شناخته می شود. این توزیع همچنین به عنوان توزیع فرسودگی، شکنندگی و استحکام مواد مورد استفاده قرار گرفته است. توزیع وایبل یکی از سه توزیع مقدار فرین حدی [1] برای مثال ، استحکام یک زنجیر دراز(یا زمان خرابی یک سیستم به صورت سری) برابر زمان خرابی ضعیفترین حلقه زنجیر یا مؤلفه است. همچنین نیروی شکنندگی یک سرامیک به وسیله ضعیفترین ترک حاصل اندازه گیری می شود. اگر یک دستگاه شامل اجزای زیادی باشد که توزیع زمان خرابی آنها یکسان باشند، آنگاه اگر با از کار افتادن یک جزء از این دستگاه، کل دستگاه از کار بیافتد آنگاه توزیع وایبل می تواند یک توزیع مناسب برای چنین دستگاهی باشد . برای مثال یک خازن [2] را در نظر بگیرید که با از کار افتادن یکی از عایقها خازن از کار می افتد، لذا طول عمر خازن وابسته به طول عمر ضعیفترین جزء آن است.
توزیع وایبل از نام یکی از فیزیکدانان اهل سوئد به نان والودی وایبل [3] گرفته شده است که در سال ۱۹۳۹ از این توزیع برای مدل بندی توزیع استحکام شکست مواد [4] استفاده کرد. چون این توزیع یکی از سه توزیع مقدار فرین حدی است که توسط ندنکو(۱۹۴۳) ارائه شده است، به همین دلیل در برخی متون آماری روسی این توزیع با نام وایبل-ندنکو [5] به کار می رود.
توزیع وایبل [6] با پارامتر مقیاس [7] $\lambda > 0$ و پارامتر شکل [8] $\beta > 0$ دارای تابع چگالی و توزیع تجمعی به شکل زیر است.

$$f_X(x;\lambda,\beta) = \frac{\beta}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta-1}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta}\right\}, \qquad x>0, \tag{۱.۱}$$

$$F_X(x;\lambda,\beta) = 1-\exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta}\right\}, \qquad x>0, \tag{۲.۱}$$

یکی از مهمترین دلایل شهرت این توزیع برای برازش داده ها این است که توزیع وایبل دارای اشکال گوناگونی است و این خاصیت موجب شده که از این توزیع برای برازش بسیاری از مجموعه داده ها استفاده شود. دو شکل ممکن است برای تابع چگالی اتفاق بیفتد که عبارتند از:
الف) به طور یکنواخت نزولی باشد.
ب) تک مدی باشد.
شکل تابع چگالی فقط به پارامتر شکل β وابسته است و مستقل از پارامتر مقیاس λاست. نتایج عبارتند از:

[1] نوع سوم از توزیع های حدی مینیمم (بین و انگلهارت ترجمه دکتر مشکانی(۱۳۸۴))
[2] capacitor
[3] Waloddi Weibull
[4] breaking strength of materials
[5] Weibull-Gnedenko
[6] Weibull
[7] scale parameter
[8] shape parameter

الف)برای $\beta \leq 1$شکل تابع چگالی به طور یکنواخت نزولی است.
ب) برای $\beta > 1$چگالی این توزیع تک مدی در$t_{Mode} = \lambda(1-\frac{1}{\beta})^{\frac{1}{\beta}}$ می باشد.

توزیع وایبل سه پارامتری با پارامتر مکان μدارای تابع توزیع تجمعی زیر می باشد.

$$F_X(x;\lambda,\beta) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)^{\beta}\right\}, \qquad x \geq \mu, \tag{۳.۱}$$

که در آن $\lambda > 0$پارامتر مقیاس و $\beta > 0$پارامتر شکل می باشند.

تابع قابلیت اعتماد [۹] توزیع وایبل دو پارامتری عبارت است از:

$$R(t) = 1 - F(t;\lambda,\beta) = \exp\left\{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\beta}\right\}, \qquad t > 0, \tag{۴.۱}$$

تابع نرخ خطر [۱۰] برای توزیع وایبل به صورت

$$h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{\beta}{\lambda^{\beta}} t^{\beta-1}, \quad t > 0, \tag{۵.۱}$$

به دست می آید. با توجه به این که تابع نرخ خطر تنها به پارامتر شکل وابسته است، لذا سه حالت برای تابع نرخ خطر می توان بیان کرد:
-تابع نرخ خطر برای $\beta < 1$ نزولی است.
-تابع نرخ خطر برای $\beta = 1$ ثابت است.
-تابع نرخ خطر برای $\beta > 1$ صعودی است.
توزیع وایبل دارای کاربردهای زیادی است از جمله
در تحلیل بقا [۱۱]
در نظریه مقادیر غایی [۱۲]
پیش بینی آب و هوا [۱۳]
برای زمان تحویل کالا در صنعت.
در مهندسی قابلیت اعتماد و تحلیل شکست.
در سیستم های رادار برای مدل بندی پراکندگی سطح سیگنال های دریافتی تولید شده توسط برخی انواع ناهنجاری ها.
برای مدل بندی مطالبه مجدد بیمه در صنعت بیمه.
برای توزیع سرعت باد.

۲.۱ شاخص CL در توزیع وایبل

[۹] reliability function
[۱۰] hazard rate function
[۱۱] Survival analysis
[۱۲] Extereme value theory
[۱۳] Weather forecasting