مقدمه

چه موقع یک گروه پاراتوپولوژیک گروه توپولوژیک است؟ طبق قضیه معروف الیس [۱] (سال ۱۹۵۷) می دانیم هر گروه نیم توپولوژیک هاسدورف موضعا فشرده ، یک گروه توپولوژیک است. اخیرا بوزیاد [۲] این قضیه را به فضاهای فشرده چخ [۳] گسترش داد است. ونتایج بسیاری از آن بدست آورده است.

زلازکو [۴] سال (۱۹۶۰) نشان داد هر گروه پارا توپوپولوژیک متریک پذیر یک گروه توپولوژیک است. در سال ۱۹۸۲ برند [۵] یافته های زلازکو و الیس را تعمیم داد و اثبات کردکه هرگروه پاراتوپولوژیک یک گروه توپولوژیک فشرده چخ است. سه سال بعد اثبات جدید و کوتاهتری از این قضیه ارائه شد. با توجه به این مطلب فیستر [۶] در سال (۱۹۸۵) پرسید:

آیا هر گروه فشرده چخ نیم توپولوژیک یک گروه پارا توپولوژیک است ؟ و از این رو بنا برقضیه برند یک گروه توپولوژیک است؟

در فصل اول این پایان نامه، قضایا و تعاریف مقدماتی را می آوریم و در فصل دوم ، ثابت می کنیم که هر گروه پاراتوپولوژیک هاسدورف متریک پذیر با ویژگی بئر یک گروه توپولوژیک است. این تعمیم یافته قضیه کلاسیک مونتگومری [۱] است.

همچنین در این پایان نامه دو حکم جدید را که بوزیاد ثابت کرده می آوریم.

۱ ــ اگرگروه پاراتوپولوژیک G پیش تصویری از یک گروه توپولوژیک تحت همریختی کامل باشد

[۱]Ellis [۲]A. Bouziad [۳]Čech-complete [۴]W.Żelazko [۵]N.Brand [۶]H.pfister

[۱]Montgomery

آنگاه G نیز گروه توپولوژیک است.

۲ــ اگر گروه پاراتوپولوژیک H تصویری از گروه توپولوژیک کلا کراندار G تحت همریختی پیوسته باشد، آنگاه H نیز گروه توپولوژیک است.

همچنین ثابت می کنیم اگر یک گروه نیم توپولوژیک شمارای نوع اول G یک زیر مجموعه چگال G_δ از یک فشرده سازی هاسدورف G باشد، آنگاه G یک گروه توپولوژیک متریک پذیر با یک متر کامل است.

درفصل سوم رابطه جدید معینی بین پایایی توابع کاردینالی در گروههای پاراتوپولوژیک اثبات می کنیم. در حقیقت نشان می دهیم که اگر G یک گروه دو دنباله ای پاراتوپولوژیک باشد به طوریکه $G \times G$ لیندلوف باشد آنگاه G شبکه ی شمارا دارد.

این موضوع روشن می کند که چرا مربع خط سورجنفری نرمال نیست.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این پایان نامه مجموعه اعداد صحیح نامنفی ، اعداد گویا ، طبیعی ، اعداد حقیقی مثبت و اعداد حقیقی را به ترتیب با ω، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{R}^+$ و $\mathbb{R}$ نشان می دهیم. نگاشت وارون گروه G را با $I : G \longrightarrow G$ که $I(x) = x^{-1}$ ،

درون G را با $int(G)$ یا $(G)^o$ ،

و نگاشت ضرب روی گروه G را با $m : G \times G \longrightarrow G$ که $m(x, y) = xy$ نشان می دهیم. در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی از توپولوژی و کاربردهای آن می پردازیم.

تعریف ۱.۱. الف. تمام اشتراک های شمارش پذیر از مجموعه های باز را یک مجموعه G_δ می نامیم.

ب. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. خانواده $\mathscr{B}$ از بازها را یک پایه می نامیم هرگاه هر زیرمجموعه باز از X را بتوان به صورت اجتماعی از عناصر $\mathscr{B}$ نوشت.
مجموعه$\mathscr{E}$از بازها را یک زیرپایه می نامیم هرگاه مجموعه متشکل از تمام اشتراک‌های متناهی از عناصر $\mathscr{E}$ یک پایه باشد.

ج. پایه شمارا: گوییم فضای X در نقطه x پایه شمارا دارد هرگاه گردایه شمارایی از همسایگی

های x مانند B موجود باشد به طوریکه هر همسایگی x دست کم حاوی یک عضو این گردایه باشد.

اگرفضایی در هر نقطه اش یک پایه شمارا داشته باشد گوییم در اولین اصل شمارایی صدق می کند (شمارای نوع اول [۱]).

د. فضایی را شمارای نوع دوم [۱] گوییم که توپولوژی آن پایه ای شمارا داشته باشد. به این معنی که فضای توپولوژیک T شمارای نوع دوم است اگر تعدادی شمارا مجموعه $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ از زیر مجموعه های باز T موجود باشد به طوریکه هر زیر مجموعه باز از T را بتوان به صورت اجتماعی از تعدادی اعضای زیر خانواده $\mathcal{U}$ نوشت.

ه. فضایی را T_1 گوییم اگر برای هر جفت نقطه جدا از هم x و y در فضا، مجموعه بازی که شامل x باشد ولی شامل y نباشد موجود باشد. یا به طور معادل فضایی T_1 است اگر تمام تک عضوی های آن بسته باشد.

و. مجموعه $\mathscr{U}$ در فضای توپولوژی X گسسته است اگر هر نقطه $x \in \mathscr{U}$ همسایگی مثل U داشته باشد به طوریکه $U \cap \mathscr{U} = \{x\}$.

ز. مجموعه $\mathscr{U}$ را σــ گسسته [۲] گوییم اگر $\mathscr{U}$ بتواند به شکل $\mathscr{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ بیان شود که در آن هر U_n گسسته است .

تعریف ۲.۱. اگر $\mathcal{U}$ و$\mathcal{V}$ پوشش هایی برای مجموعه X باشند ، مجموعه $\mathcal{V}$ تظریف مجموعه $\mathcal{U}$ گفته می شود اگر برای هر $V \in \mathcal{V}$ یک $U \in \mathcal{U}$ وجود داشته باشد به طوریکه $V \subset U$.

تعریف ۳.۱. یک مجموعه به همراه یک عمل دو تایی،که خواص زیر را داشته باشد یک گروه می نامیم.

(۱) شرکت پذیر باشد .

[۱] first countable [۱] second countable [۲] σ-discrete

(۲) دارای عضو خنثی باشد.

(۳) دارای وارون باشد.

اگر عمل دوتایی علاوه بر خواص بالا دارای خاصیت جابه‌جایی باشد، به آن گروه جابه‌جایی یا گروه آبلی می‌گویند.

نمایه

ه