

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و
نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه
متعلق به دانشگاه رازی است.



دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان :

عدد نظم مدول همولوژی Tor و اعداد بتی مدرج

استاد راهنما:
دکتر احد رحیمی

نگارش:
حسن نورمحمدی

بهمن ۱۳۸۹



دانشگاه رازی
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

نام دانشجو:
حسن نورمحمدی

تحت عنوان :
عدد نظم مدول همولوژی Tor
و اعداد بتی مدرج

در تاریخ ۱۳۸۹/۱۱/۳۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر احد رحیمی با مرتبه علمی استادیار امضاء:

۲- استاد داور داخل گروه دکتر سیروس رسولیار با مرتبه علمی استادیار امضاء:

۳- استاد داور خارج گروه دکتر سیامک یاسمی با مرتبه علمی استاد امضاء:

گزیده ای از دعای کرام الاخلاق امام سجاد (علیه السلام)

پروردگارا، بر محمد و آل او درود فرست و ایمانم را به کاملترین درجه ایمان برسان و یقینم را بهترین یقین قرار ده و فرجام نیتم را بهترین نیتها بگردان و عملم را به بهترین اعمال برسان. پروردگارا، با لطف خودت نیتم را نیکو گردان و یقینم را با رحمت بی‌پایانت از گزند انحراف، مصون دار و با قدرت بی‌انتهایت، هر عمل فاسدی که از من سر زده است اصلاح فرما.

پروردگارا، بر محمد و آل او درود فرست و اموری را که اهتمام به آنها مشغولم می‌کند کفایت فرما و مرا به کاری که فردای قیامت از من درخواست می‌کنی وادار کن و در ایام عمرم فراغت بخش تا به کاری که برای آنم آفریده‌ای بپردازم و بی‌نیازم کن و به من روزی وسیع عطا فرما و عزت ببخش و گرفتار کبر و خودپسندی نکن و به عبادت خالص مشغولم دار و عبادتم را با عجب و غرور باطل نکن. پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و به هر اندازه‌ای که میان مردم مرا مرتبه می‌بخشی پیش خودم به همان مقدار خوارم کن و هر عزت ظاهری که برایم پدیدار می‌سازی به همان اندازه پیش نفسم برای من خواری باطنی پدید آور.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و چنان کن که از هدایت شایسته بهره‌مند شوم و آن را با هیچ چیز عوض نکنم و از راه حق بهره‌مند گردم و از آن بیرون نروم و به نیت درست دست یابم و در آن شك نکنم و تا هنگامی که عمرم در راه طاعت تو می‌گذرد به من عمر بده و آنگاه که عمرم چراگاه شیطان شود، پیش از آنکه دشمنی سخت تو به من روی آورد یا خشم تو محکم و پایدار گردد جانم را بگیر. پروردگارا، هیچ خصلتی را که مردم زشت بدانند در من نگذار مگر آنکه اصلاحش کنی و هیچ عادت ناپسندی را که مردم سرزنش کنند باقی نگذار مگر آنکه نیکش سازی و هیچ خوی پسندیده‌ای را در من ناقص نگذار مگر آنکه کاملش کنی.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و دشمنی سخت دشمنان را درباره من به دوستی تبدیل کن و حسد و بدخواهی سرکشان را به محبت تغییر ده و بدگمانی صالحان را به اطمینان و دشمنی نزدیکان را به دوستی و بدرفتاری خویشان را به خوشرفتاری و خوار کردن نزدیکان را به یاری و دوستی مدارا کنندگان را به دوستی واقعی مبدل فرما.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هست...

سپاس گزارى...۞

سپاس خداوندگار حكيم را كه با لطف بى كران خود، آدمى را زيور عقل آراست.
در آغاز وظيفه خود مى دانم از زحمات بى دريغ استاد راهنماى خود، جناب آقاى دكتور احد رحيمى،
صميمانه تشكر و قدردانى كنم كه قطعاً بدون راهنمايى هاى ارزنده ايشان، اين مجموعه به انجام
نمى رسيد. در پايان، بوسه مى زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانى، پدر و مادر عزيزم و بعد از
خدا، ستايش مى كنم وجود مقدس شان را و تشكر مى كنم از برادران عزيزم به پاس عاطفه سرشار و
گرمائى اميدبخش وجودشان، كه در اين سردترين روزگاران، بهترين پشتيبان من بودند.

حسن نورمحمدى

بهمن ۱۳۸۹

تقديم به

پدر و مادر مهربانم ۞

چکیده

فرض کنید K میدان و $S = K[x_1, \dots, x_n]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای مدرج استاندارد با ایده‌ال مدرج ماکسیمال $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ باشد و M و N S -مدولهای مدرج و متناهی مولد باشند. ما با شرط اینکه بُعد کرول مدول همولوژی $\text{Tor}_i^S(M, N)$ کمتر یا مساوی یک باشد کرانی برای عدد نظم کوهمولوژی موضعی $\text{Tor}_k^S(M, N)$ بر حسب اعداد بتی مدرج مدولهای M و N می‌یابیم و نتایج به دست آمده را برای سیزجی‌ها^۱، حاصل ضربها و توانهای ایده‌ال‌ها بکار می‌بریم. به عنوان نمونه نشان می‌دهیم هر ایده‌ال همگن \mathfrak{m} -اولیه که نمایش خطی دارد توانی برابر با توانی از \mathfrak{m} دارد و اگر تحلیل آزاد می‌نی‌مال I برای $\lceil (n-1)/2 \rceil$ مرحله خطی باشد آنگاه I^\vee با توانی از \mathfrak{m} برابر است.

کلمات کلیدی:

عدد نظم، تحلیل آزاد می‌نی‌مال مدرج، کوهمولوژی موضعی، اعداد بتی مدرج

^۱Syzygies

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	۱ پیش‌نیازها
۲	۱-۱ مفاهیم و قضایای از جبر جایجایی
۳	۲-۱ مفاهیم و قضایای از جبر همولوژی
۵	۲ دنباله‌های طیفی
۶	۱-۲ همبافت دوگانه
۸	۲-۲ صافی و کاپل دقیق
۹	۳ تحلیل آزاد مدرج و عدد نظم
۱۰	۱-۳ تحلیل آزاد مدرج و اعداد بتی مدرج
۱۱	۲-۳ عدد نظم کاستلنیو-مافورد
۱۲	۴ عدد نظم مدول همولوژی Tor
۱۳	۱-۴ کران روی عدد نظم کوه‌همولوژی موضعی Tor
۱۵	منابع و مآخذ
۱۷	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۸	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

پی‌شگفتار

موضوع عدد نظم ی‌کی از مفاهیم اساسی در جبر جابجایی و هندسه جبری تصویری است که اولین بار توسط دی‌وی‌د مامفورد^۱ در سال ۱۹۶۶ تحت عنوان عدد نظم کاستلنی‌وو^۲ نامگذاری شد. دلیل این نامگذاری به نتایج کلاسیکی که کاستلنی‌وو در سال ۱۸۹۳ بر روی خم‌های تصویری به دست آورد، برمی‌گردد. مامفورد عدد نظم را برحسب کوهمولوژی بافه^۳ مطرح کرد و در سال ۱۹۸۲ اوی‌شی^۴ تعریفی از عدد نظم کاستلنی‌وو-مامفورد را بر حسب کوهمولوژی موضعی ارائه کرد و آیزن‌باد و گوتو در سال ۱۹۸۴ این ناوردا^۵ را بر حسب تحلیلی‌های آزاد می‌نی‌مال بی‌ان کردند.

با معرفی این ناوردا، مسئله یافتن کرانی برای عدد نظم به موضوع جذابی تبدیلی‌گردید و افراد زیادی توانستند کران‌هایی برای این ناوردا پیدا کنند.

در این پایان‌نامه، ما یک قضیه اساسی روی حلقه‌ی چندجمله‌ای ثابت می‌کنیم که نتایج به دست آمده توسط پی‌تلود^۶-گی‌می‌گلی‌انو^۷-جرامی‌تا^۸[۱۹۹۵]، چندلر^۹[۱۹۹۷]، سی‌دمن^{۱۰}[۲۰۰۲]، کُنکا^{۱۱}-هرزوغ^{۱۲}[۲۰۰۳] و کاوی‌گلی^{۱۳}[۲۰۰۳] را در بر می‌گیرد.

فصل اول این تحقیق، شامل مطالبی از جبر جابجایی و همولوژی است که در فصول بعد از آنها استفاده می‌کنیم. در فصل دوم دنباله‌های طیفی را معرفی می‌کنیم که نقشی مهمی در اثبات قضیه اصلی این پایان‌نامه دارد. در فصل سوم، ابتدا مفهوم تحلیلی آزاد مدرج را معرفی و چگونگی محاسبه آن را بیان می‌کنیم و در بخش بعد عدد نظم را برحسب تحلیلی آزاد می‌نی‌مال تعریف می‌کنیم و در ادامه تعاریف معادل آن را بر حسب Ext, Tor، کوهمولوژی موضعی و برش‌ها^{۱۴} بیان می‌کنیم.

در فصل چهارم که در واقع فصل اصلی پایان‌نامه است، M و N را دو S -مدول مدرج متناهی مولد در نظر می‌گیریم که S حلقه‌ی چندجمله‌ای مدرج استاندارد $S = K[x_1, \dots, x_n]$ روی میدان K با ایده‌ال همگن ماکسی‌مال $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ است و فرض می‌کنیم بعد کرول $\text{Tor}_1^S(M, N)$ کمتر یا مساوی یک است.

با مفروضات فوق، در قضیه ۴-۱-۱ کران بالایی برای عدد نظم $H_m^i(\text{Tor}_k^S(M, N))$ بر حسب اعداد بتی مدرج مدوله‌های M و N می‌یابیم. از این قضیه نتیجه مهم زیر را به دست می‌آوریم

$$\text{reg Tor}_k(M, N) \leq \text{reg } M + \text{reg } N + k.$$

که در حالت $k = 0$ کران بالایی برای عدد نظم حاصل ضرب تانسوری $M \otimes_S N$ به دست می‌دهد که در

^۱Mamford ^۲Castelnuovo regularity ^۳Sheaf cohomology ^۴Ooishi ^۵Invariant ^۶Pitteloud

^۷Gimigliano ^۸Geramita ^۹Chandler ^{۱۰}Sidman ^{۱۱}Conca ^{۱۲}Herzog ^{۱۳}Caviglia

^{۱۴}Truncations

سال ۲۰۰۲، سی‌دمن^۱ در [۲۷] و در سال ۲۰۰۳ کاوی‌گلی^۲ در [۹] هر یک با روش‌های متفاوتی پیدا کردند.

در ادامه روابط جالبی بین اعداد بتی مدرج به دست می‌آوری‌م. برای نمونه نشان می‌دهی‌م اگر $I \subseteq S$ یک ایده‌ال و $M = N = S/I$ مدول‌های دوری با بعد کمتر یا مساوی یک باشند آنگاه تابع $p \rightarrow t_p(S/I)$ در شرط تحدب ضعیف

$$t_n(S/I) \leq t_p(S/I) + t_{n-p}(S/I)$$

برای هر $1 \leq p \leq n$ صدق می‌کند. که در آن $t_p(S/I)$ بزرگترین درجه از مولدهای می‌نی‌مال همگن p -امی ن‌سی‌زی‌جی S/I است.

در بخش سوم این فصل با اثبات قضایای برای حاصل ضرب ایده‌ال‌ها، شرای‌طی را فراهم می‌آوری‌م که توان‌های یک ایده‌ال دارای تحلیل خطی باشند. در این بخش فرضیه‌ای^۳ که اولری‌خ^۴ و آی‌زنباد^۵ در [۱۵] به شرح زیر مطرح نمودند را در حالت $n = 3$ و برای ایده‌ال‌های تک‌جمله‌ای ثابت می‌کنی‌م. **فرضیه.** فرض کنی‌د $I \subseteq S$ ایده‌الی m -اولی‌ه با تولی‌د یکسان از درجه d و به طور خطی نمای‌ش‌پذی‌ر باشد. در این صورت $I^{n-1} = m^{d(n-1)}$.

با قرار دادن $I = J$ در نتیجه زیر، فرضیه فوق در حالت $n = 3$ ثابت می‌شود.

نتیجه؟؟. فرض کنی‌د I و J ایده‌ال‌های همگن از S با تولی‌د یکسان از درجه‌ی d و با بُعدهای کمتر یا مساوی یک باشند. در این صورت اگر تحلیل‌های I و J برای $\lceil (n-1)/2 \rceil$ مرحله خطی باشند (برای نمونه، اگر I و J دارای نمای‌ش خطی باشند و $n \leq 3$)، آنگاه IJ تحلیل خطی دارد. بوی‌ژه اگر I و J ایده‌ال‌های m -اولی‌ه باشند آنگاه $IJ = m^{2d}$.

در آخر قضیه‌ای از رومر^۶ در [۲۵] را اثبات می‌کنی‌م. این قضیه بی‌ان می‌کند که تحت چه شرای‌طی همه‌ی توان‌های یک ایده‌ال، تحلیل خطی دارند.

^۱Sidman ^۲Caviglia ^۳Conjecture ^۴Ulrich ^۵Eisenbud ^۶Römer

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$V(I)$	مجموعه ایده‌ال‌های اول شامل I
$\text{Supp}_R(M)$	تکیه‌گاه R -مدول M
$\text{Spec}(R)$	مجموعه ایده‌ال‌های اول حلقه R
$\text{Ass}_R(M)$	ایده‌ال‌های اول وابسته R -مدول M
$\text{Ann}_R(M)$	پوچساز R -مدول M
$Z_R(M)$	مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر R -مدول M
$\dim R$	بعد حلقه R
$\dim_R(M)$	بعد کرول R -مدول M
$\text{codim}(-)$	همبعد
$\text{ht}(-)$	ارتفاع
$\text{Max}(R)$	مجموعه ایده‌ال‌های ماکسی‌مال حلقه R
$l_R(M)$	طول R -مدول M
$\text{grade}_R(I, M)$	طول M -رشته منظم ماکسی‌مال در I
$\text{depth}_R(M)$	طول M -رشته منظم ماکسی‌مال در ایده‌ال ماکسی‌مال \mathfrak{m}
$\text{Socle}_R(M)$	ساکل R -مدول M
$\text{pd}_R(M)$	بعد پروژکتیو R -مدول M
$\mathbf{Mod}(R)$	رسته‌ی R -مدول‌ها
$H_{\mathfrak{m}}^i(-)$	i -امی‌ن کوهمولوژی موضعی
$\deg(x)$	درجه‌ی عنصر همگن x
$K_{\bullet}(\underline{x}; R)$	همبافت کزول R نسبت به \underline{x}
$H_p(\underline{x}; M)$	p -امی‌ن مدول همولوژی همبافت کزول M نسبت به \underline{x}
$S = K[x_1, \dots, x_n]$	حلقه چندجمله‌ای روی می‌دان K
$\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$	ایده‌ال همگن ماکسی‌مال حلقه چندجمله‌ای S
$\text{Mon}(S)$	مجموعه‌ی تمام تک‌جمله‌ای‌های S

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل تعاریف و قضایای از جبر جابجایی و همولوژی را که نقش مهمی در فهم بهتر مطالب دارند، یادآور می‌شویم. فرض ما بر این است که خواننده با مفاهیم جبر پی‌شرفته آشنایی دارد. در سرتاسر این پایان‌نامه، منظور از حلقه‌ی R ، حلقه‌ای جابجایی و یک‌دار است.

۱-۱ مفاهیم و قضایایی از جبر جابجایی

تعریف ۱-۱-۱. فرض کنید I ایده‌الی سره از حلقه‌ی R باشد، $V(I)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$V(I) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) : I \subseteq \mathfrak{p} \}.$$

تعریف ۱-۱-۲ (تکیه‌گاه). فرض کنید M یک R -مدول باشد، تکیه‌گاه M را که با نماد $\text{Supp}(M)$ نمایش می‌دهیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\text{Supp}(M) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) : M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \}.$$

تعریف ۱-۱-۳ (ایده‌ال‌های اول وابسته). فرض کنید M یک R -مدول باشد، مجموعه ایده‌ال‌های اول وابسته M را که با علامت $\text{Ass}(M)$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از

$$\text{Ass}(M) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) : \exists x \in M, \mathfrak{p} = \text{Ann}_R(x) \}.$$

لم ۱-۱-۴. فرض کنید M یک R -مدول باشد، آنگاه

$$1. \text{Supp}(M) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) : \exists x \in M, \text{Ann}_R(x) \subseteq \mathfrak{p} \}.$$

$$2. M \neq 0 \text{ اگر و تنها اگر } \text{Supp}_R(M) \neq \emptyset.$$

$$3. \text{ اگر } R \text{ نوتری و } M \text{ با تولید متناهی باشد، آنگاه } \text{Supp}(M) = V(\text{Ann}_R(M)).$$

$$4. \text{ اگر } I \text{ ایده‌الی از حلقه } R \text{ (نه لزوماً نوتری) باشد آنگاه } \text{Supp}(R/I) = V(I).$$

برهان. رجوع شود به لم ۲۰ از فصل ۹ در [۲۸] و تمرین ۱۹ از فصل ۳ در [۳]. \square

تعریف ۱-۱-۵ (بعد حلقه). بعد حلقه R را با $\dim(R)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\dim(R) = \sup \{ n \in \mathbb{N}_0 : \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_i \in \text{Spec}(R); i = 0, \dots, n \}.$$

تعریف ۱-۱-۶. فرض کنید I ایده‌الی از حلقه R باشد، بُعد I که با $\dim I$ نمایش می‌دهیم را همان $\dim R/I$ تعریف می‌کنیم. یعنی

$$\dim I = \dim(R/I) = \sup \left\{ n \in \mathbb{N}_0 : \frac{\mathfrak{p}_0}{I} \subsetneq \frac{\mathfrak{p}_1}{I} \subsetneq \dots \subsetneq \frac{\mathfrak{p}_n}{I}, \mathfrak{p}_i \in \text{Spec}(R); i = 0, \dots, n \right\} \\ = \sup \left\{ n \in \mathbb{N}_0 : I \subseteq \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n \right\}.$$

۲-۱ مفاهیم و قضایای از جبر همولوژی

تعریف ۱-۲-۱ (n -آمین مدول همولوژی). یک همبافت نزولی از R -مدول‌ها، یک دنباله از R -همریختی‌های

$$C_\bullet: \dots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \dots$$

است به طوری که برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم $d_n \circ d_{n+1} = 0$. برای هر همبافت نزولی C_\bullet و هر $n \in \mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم

$$B_n(C_\bullet) = \text{Im } d_{n+1}, \quad Z_n(C_\bullet) = \text{Ker } d_n$$

و n -آمین مدول همولوژی همبافت C_\bullet را تعریف می‌کنیم

$$H_n(C_\bullet) = \frac{Z_n(C_\bullet)}{B_n(C_\bullet)}.$$

تعریف ۱-۲-۲ (n -آمین مدول کوه‌همولوژی). یک همبافت صعودی از R -مدول‌ها، یک دنباله از R -همریختی‌های

$$C^\bullet: \dots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \longrightarrow \dots$$

است به طوری که برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم $d^n \circ d^{n-1} = 0$. برای هر همبافت صعودی C^\bullet و هر

$n \in \mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم

$$B^n(C^\bullet) = \text{Im } d^{n-1}, \quad Z^n(C^\bullet) = \text{Ker } d^n$$

و n -امین مدول کوهمولوژی همبافت C^\bullet را تعریف می‌کنیم

$$H^n(C^\bullet) = \frac{Z^n(C^\bullet)}{B^n(C^\bullet)}.$$

قضیه ۱-۲-۳. فرض کنید T یک تابعگون جمعی دقیق از رسته R -مدول‌ها به رسته R' -مدول‌ها

باشد. در این صورت برای R -همبافت‌های C_\bullet و C^\bullet داریم

۱. اگر T تابعگونی همورد باشد آنگاه برای هر $n \in \mathbb{Z}$,

$$H_n(T(C_\bullet)) \cong T(H_n(C_\bullet)), \quad H^n(T(C^\bullet)) \cong T(H^n(C^\bullet)).$$

۲. اگر T تابعگونی پادورد باشد آنگاه برای هر $n \in \mathbb{Z}$,

$$H^n(T(C_\bullet)) \cong T(H_n(C_\bullet)), \quad H_n(T(C^\bullet)) \cong T(H^n(C^\bullet)).$$

□

برهان. رجوع شود به قضیه ۲۳ از فصل ۸ و قضیه ۳ از فصل ۱۱ در [۱۷].

فصل ۲

دنباله‌های طیفی

در این فصل به تعریف دنباله طیفی^۱ می‌پردازیم. قبل از آن باید با مفاهیمی مانند همبافت دوگانه، همبافت مجتمع و کاپل دقیق آشنا شد. در واقع این فصل ابزاری قوی به ما معرفی می‌کند که در فصل ۴ در اثبات قضیه اساسی ۴-۱-۱، آن را به کار می‌گیریم.

۱-۲ همبافت دوگانه

تعریف ۱-۱-۲. یک مدول مدرج دوگانه $M = (M_{(p,q)})_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ ، خانواده‌ای اندیس‌گذاری شده از R -مدول‌هاست. که معمولاً به صورت $M_{\bullet\bullet}$ نمایش می‌دهیم. می‌توان یک مدول مدرج دوگانه را روی صفحه مختصات نمایش داد.

تعریف ۲-۱-۲. فرض کنید M و N دو مدول مدرج دوگانه و $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ باشد. یک نگاشت مدرج دوگانه از درجه‌ی (a, b) نمایش داده شده به صورت $f : M \rightarrow N$ ، خانواده‌ای است از هم‌ریختی‌های $(f_{(p,q)} : M_{(p,q)} \rightarrow N_{(p+a, q+b)})_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ و می‌نویسیم $\deg(f) = (a, b)$.

قضیه ۳-۱-۲. فرض کنید $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ نگاشت‌هایی مدرج دوگانه با درجه‌های به ترتیب (a, b) و (a', b') باشند آنگاه ترکیب $g \circ f$ یک نگاشت مدرج دوگانه از درجه $(a + b, a' + b')$ است.

□

برهان. واضح است.

نکته و تعریف ۴-۱-۲. خانواده‌ی R -مدول‌های مدرج دوگانه و نگاشت‌های مدرج دوگانه تشکیل یک رسته می‌دهند. حال دقیق بودن یک دنباله در این رسته را تعریف می‌کنیم.

اگر $M' = (M'_{(p,q)})_{(p,q) \in \mathbb{Z}^r}$ و $M = (M_{(p,q)})_{(p,q) \in \mathbb{Z}^r}$ دو مدول مدرج دوگانه باشند در این صورت M' یک زیرمدول M است اگر $M'_{(p,q)} \subseteq M_{(p,q)}$ برای هر $(p, q) \in \mathbb{Z}^r$. لذا نگاشت شمول یک نگاشت مدرج دوگانه از درجه (\circ, \circ) است و اگر $M' \subseteq M$ باشد آنگاه مدول خارج قسمتی $M/M' = (M_{(p,q)}/M'_{(p,q)})_{(p,q) \in \mathbb{Z}^r}$ یک مدول مدرج دوگانه است و نگاشت طبیعی $M \rightarrow M/M'$ یک نگاشت مدرج دوگانه از درجه (\circ, \circ) است.

و حال اگر $f : M \rightarrow N$ یک نگاشت مدرج دوگانه از درجه (a, b) باشد آنگاه نگاشت شمول $\text{Ker } f = (\text{Ker } f_{(p,q)}) \rightarrow (M_{(p,q)})$ به طور طبیعی مدرج دوگانه است، از طرف دیگر برای هر (p, q) ، تعریف کنیم

$$\text{Im } f = (\text{Im } f_{(p-a, q-b)}) \subseteq (N_{(p,q)})_{(p,q) \in \mathbb{Z}^r}$$

^۱Spectral sequence

بنابراین دقیق بودن رشته $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ بدین معناست که $\text{Im } f = \text{Ker } g$ و این یعنی برای هر $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ ، $\text{Im } f_{(p-a, q-b)} = \text{Ker } g_{(p, q)}$.

فرض کنید مثلث $(A, B, C, \alpha, \beta, \gamma)$ از مدول‌ها و نگاشت‌های مدرج دوگانه زیر

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ & \searrow \gamma & \swarrow \beta \\ & C & \end{array}$$

در هر رأس دقیق باشد یعنی $\text{Im } \alpha = \text{Ker } \beta$ و $\text{Im } \beta = \text{Ker } \gamma$ و $\text{Im } \gamma = \text{Ker } \alpha$. این مثلث دقیق در واقع بخشی از یک دنباله دقیق و طولانی برای هر $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ است. حال اگر α و β و γ نگاشت‌هایی مدرج دوگانه به ترتیب از درجه‌های (a, a') و (b, b') و (c, c') باشند برای $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ دنباله دقیق و طولانی زیر را داریم

$$\cdots \longrightarrow B_{(p-b-c, q-b'-c')} \xrightarrow{\beta} C_{(p-c, q-c')} \xrightarrow{\gamma} A_{(p, q)} \xrightarrow{\alpha} B_{(p+a, q+a')} \xrightarrow{\beta} C_{(p+a+b, q+a'+b')} \longrightarrow \cdots$$

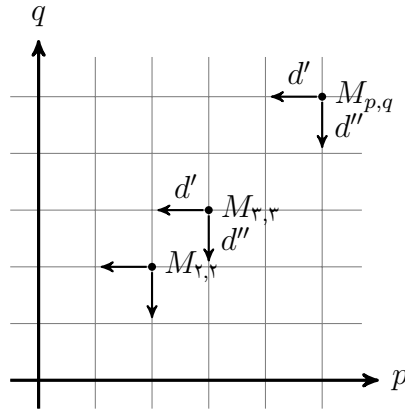
تعریف ۵-۱-۲. یک همبافت دوگانه^۱، سه‌تایی مرتب مانند (M, d', d'') است که در آن $M = (M_{p, q})$ مدول مدرج دوگانه و $d', d'' : M \longrightarrow M$ دیفرانسیل‌هایی مدرج دوگانه هستند با درجه‌های $\deg(d') = (-1, 0)$ و $\deg(d'') = (0, -1)$ که خاصیت پادجابجایی^۲ دارند یعنی

$$d'_{p, q-1} d''_{p, q} + d''_{p-1, q} d'_{p, q} = 0$$

دقت شود که منظور از دیفرانسیل‌های d' و d'' یعنی این که $d'od' = 0$ و $d''od'' = 0$. هر همبافت دوگانه را می‌توان در صفحه مختصات p و q نمایش داد. بدین صورت که هر مدول $M_{p, q}$ با نقطه‌ای (p, q) در این صفحه نظیر می‌شود (شکل ۱-۲).

بنابراین برای هر p و q دیفرانسیل $d'_{p, q} : M_{p, q} \longrightarrow M_{p-1, q}$ نقاط را یک واحد به سمت چپ و دیفرانسیل $d''_{p, q} : M_{p, q} \longrightarrow M_{p, q-1}$ نقاط را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کند و سطرهای $M_{*, q}$ و ستون‌های $M_{p, *}$ همبافت هستند و همچنین تساوی $d'_{p, q-1} d''_{p, q} = -d''_{p-1, q} d'_{p, q}$ بیان می‌کند که هر مربع در نمودار شکل ۱-۲، پادجابجایی است.

^۱Bicomplex or Double complex ^۲Anticommutative



شکل ۲-۱: همبافت دوگانه

۲-۲ صافی و کاپل دقیق

تعریف ۲-۲-۱. فرض کنید \mathcal{A} یک رسته آبدی باشد. رسته تمام همبافت‌های در \mathcal{A} را با نماد $\text{Comp}(\mathcal{A})$ نمایش می‌دهیم.

همبافت $(A_\bullet, \delta_\bullet)$ را یک زیر همبافت (C_\bullet, d_\bullet) گوئیم هرگاه یک نگاشت زنجیری $i : A_\bullet \rightarrow C_\bullet$ چنان باشد که برای هر n نگاشت i_n یک به یک باشد و در رسته $\text{Comp}(\text{Mod})$ همبافت $(A_\bullet, \delta_\bullet)$ یک زیر همبافت (C_\bullet, d_\bullet) است هرگاه برای هر n داشته باشیم A_n زیرمدول C_n و $\delta_n = d_n|_{A_n}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} \longrightarrow \dots \\
 & & \uparrow i_{n+1} & & \uparrow i_n & & \uparrow i_{n-1} \\
 \dots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{\delta_n} & A_{n-1} \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

فصل ۳

تحلیل آزاد مدرج و عدد نظم

با توجه به این که ابزار کار ما در این پای‌ان نامه حلقه چندجمله‌ای است بی‌شتر قضایا و لم‌ها روی این حلقه بی‌ان شده است.

۱-۳ تحلیل آزاد مدرج و اعداد بتی مدرج

تعریف و نکته ۱-۳-۱. R -مدول F را آزاد مدرج گوئیم، هرگاه F دارای پایه‌ای باشد که همه‌ی اعضای آن همگن باشد به عبارتی خانواده‌ای از اعداد صحیح $\{n_i\}_{i \in I}$ چنان باشد که $F \cong \bigoplus_{i \in I} R(n_i)$ بنابراین می‌توان به سادگی نشان داد که هر مدول مدرج، تصویر همریخت یک مدول آزاد مدرج است، یعنی اگر M یک R -مدول مدرج باشد و $\{m_i\}_{i \in I}$ مجموعه مولدی برای M باشد که برای هر $i \in I$ ، $\deg(m_i) = n_i$ آنگاه R -همریختی زیر همگن و پوشاست

$$\varphi : \bigoplus_{i \in I} R(-n_i) \longrightarrow M$$

$$e_i \longmapsto m_i$$

تعریف ۱-۳-۲. فرض کنید M یک R -مدول مدرج باشد، آنگاه یک تحلیل آزاد مدرج از M ، رشته‌ای دقیق به صورت

$$\cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \xrightarrow{d_r} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0.$$

است که در آن F_i ها، R -مدول‌های آزاد مدرج هستند و d_i ها، R -همریختی‌های همگن‌اند.

تعریف ۱-۳-۳. فرض کنید (R, m) یک حلقه *موضعی و M یک R -مدول مدرج با تحلیل آزاد مدرج به صورت

$$F : \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \xrightarrow{d_r} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0.$$

باشد. گوئیم تحلیل فوق مینیمال است هرگاه برای هر $i \geq 1$ ، $\text{Im}(d_i) \subseteq mF_{i-1}$ ، و به عبارت دیگر نگاشت‌های همبافت $F \otimes_R R/m$ ، همه برابر صفر باشند.

۲-۳ عدد نظم کاستلنیوو-مامفورد

در این بخش به معرفی عدد نظم کاستلنیوو-مامفورد به همراه برخی تعاریف معادل با آن و یک سری قضایا و نتایج در مورد آن می پردازیم.

فرض بر این است که $S = K[x_1, \dots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای با ساختار استاندارد مدرج روی می‌دان K با ایده‌آل ماکسیمال همگن $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ است.

تعریف ۱-۲-۳ (عدد نظم کاستلنیوو-مامفورد). فرض کنید M یک S -مدول مدرج متناهی مولد با تحلیل آزاد مینیمال مدرج به صورت

$$0 \longrightarrow F_s \longrightarrow \dots \longrightarrow F_i \longrightarrow \dots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

باشد. (توجه شود که بنابر قضیه سیزیجی هیلبرت؟؟ و گزاره؟؟ طول این تحلیل متناهی و با بعد پروژکتیو M برابر است).

گیریم b_i ماکسیمم درجه از مولدهای F_i باشد. برای عدد صحیح r ، مدول M را r -منظم گوییم هرگاه برای هر $i = 0, \dots, s$ ، $b_i - i \leq r$ باشد. و عدد نظم کاستلنیوو-مامفورد یا به اختصار عدد نظم M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\text{reg}(M) = \min \{r : b_i - i \leq r ; i = 0, \dots, s\}$$

که این خود معادل است با

$$\text{reg}(M) = \max \{b_i - i : i = 0, \dots, s\}.$$

بنابراین، می‌توان گفت که S -مدول M ، r -منظم است هرگاه $\text{reg}(M) \leq r$. بعلاوه اگر $M = 0$ ،
تعریف می‌کنیم $\text{reg}(M) = -\infty$.

فصل ۴

عدد نظم مدول همولوژی Tor

مقدمه: در سراسر این فصل، $S = K[x_1, \dots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای با ساختار استاندارد مدرج روی میدان K و ایده‌آل ماکسی‌مال همگن $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ است. بعد کرول مدول M را با $\dim M$ و بعد فضای برداری M را با $\dim_K M$ نمایش می‌دهیم. برای S -مدول مدرج متناهی مولد M و ایده‌آل I از S با توجه به نتیجه **۱-۱-۶**، $\text{codim } M = n - \dim M$ و $\text{codim } I = n - \dim I$. همان طور که در تعریف ۱-۱-۶ بیان شد منظور از $\dim I$ همان $\dim S/I$ است. در این فصل برای عدد نظم S -مدول مدرج متناهی مولد M از تعابیر معادل آن که در بخش ۲-۳ بیان شد استفاده می‌کنیم یعنی

$$\text{reg}(M) = \max_j \{ \text{reg } H_{\mathfrak{m}}^j(M) + j \}$$

و

$$\text{reg}(M) = \max_p \{ \text{reg } \text{Tor}_p^S(M, K) - p \}$$

و یا به عبارتی با توجه به ملاحظه **۱-۱-۶**،

$$\text{reg}(M) = \max_p \{ t_p(M) - p \}$$

که در آن $t_p(M) = \text{reg } \text{Tor}_p^S(M, K) = \max \{ j : \beta_{ij} \neq 0 \}$.

اگر $M = 0$ تعریف می‌کنیم $\text{reg}(M) = -\infty$.

۱-۴ کران روی عدد نظم کوهمولوژی موضعی Tor

در این بخش به بیان یک قضیه اساسی می‌پردازیم که برای اثبات آن نیازمند به ابزار کارآمد دنباله طیفی در فصل ۲ هستیم.

قضیه ۱-۴-۱. فرض کنید M و N دو S -مدول مدرج متناهی مولد و k اعداد صحیح باشند

و $\dim \text{Tor}_k^S(M, N) \leq 1$. در این صورت برای هر p و q که $p + q = n - j + k$ ،

$$\text{reg } H_{\mathfrak{m}}^j(\text{Tor}_k^S(M, N)) \leq \max \{ X, Y, Z \}$$

که در آن

$$X = t_p(M) + t_q(N) - n$$

$$Y = \max_{\substack{p'+q'=n-j+k \\ p'>p}} \left\{ t_{p'}(M) + \operatorname{reg} H_{\mathfrak{m}}^{n-q'}(N) \right\}$$

$$Z = \max_{\substack{p'+q'=n-j+k \\ p'<p}} \left\{ \operatorname{reg} H_{\mathfrak{m}}^{n-p'}(M) + t_{q'}(N) \right\}.$$

منابع و مآخذ

- [۱] س. ی. اسمی، م. پورنکی، مقدمه‌ای بر نظریه مدول‌ها. انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، چاپ دوم، ۱۳۸۶.
- [2] R.B. Ash , A course in commutative algebra., Lecture notes 2003.
- [3] M.F. Atiyah , I.G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra. Addison–Wesley, London (1969).
- [4] M. Auslander, Modules over unramified regular local rings. Illinois J. Math., 5:631–647, 1961.
- [5] N. Bourbaki, Commutative Algebra, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [6] M.P. Brodmann, R.Y. Sharp, Local Cohomology: An Algebraic Introduction with Geometric Applications, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 60, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [7] W. Bruns, J. Herzog, Cohen–Macaulay Rings, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 39, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [8] W. Bruns, U. Vetter, Determinantal Rings. Springer LNM 1327, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [9] G. Caviglia, Bounds on the Castelnuovo–Mumford regularity of tensor products, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear), preprint, 2003.
- [10] G. Caviglia, Koszul algebras, Castelnuovo–Mumford regularity and generic initial ideals, Ph.D. thesis, University of Kansas, 2004.
- [11] A. Conca, Regularity jumps for powers of ideals, <http://www.arxiv.org/math.AC/0310493>, 2003.
- [12] A. Conca, J. Herzog and T. Hibi, Rigid resolutions and big Betti numbers, Comment. Math. Helv. 79 (2004), 826–839.
- [13] D. Cox, J. Little, D. O’Shea, Using Algebraic Geometry. Springer (1992).
- [14] D. Eisenbud, Commutative Algebra with a view towards Algebraic Geometry. Springer (1995).
- [15] D. Eisenbud, C. Huneke and B. Ulrich, The regularity of Tor and graded Betti numbers, Amer. J. Math. 128 (2006) 573–605.
- [16] D. Eisenbud, Geometry of Syzygies, Springer-Verlag, New York, 2004.

- [17] H.B. Foxby, Homological algebra, Lecture notes.
- [18] D.R. Grayson, M. Stillman, Macaulay 2, A Software System for Research in Algebraic Geometry, <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2>.
- [19] J. Herzog and T. Hibi, Monomial ideals, Springer London Dordrecht Heidelberg New York, 2010.
- [20] J. Herzog, T. Hibi, X. Zheng, Monomial ideals whose powers have a linear resolution. Math. Scand., 95, 23–32 (2004).
- [21] J.P. Serre, Local Algebra, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000.
- [22] T. Marley, Graded rings and modules, Lecture notes.
- [23] S. Lichtenbaum, On the vanishing of Tor in regular local rings. Illinois J. Math., 10:220–226, 1966.
- [24] I. Peeva, Graded syzygies, Springer-Verlag London Limited 2010.
- [25] T. Römer, Homological properties of bigraded algebras. Ill. J. Math., 45, 1361–1376 (2001).
- [26] J.J. Rotman, An Introduction to Homological Algebra, Springer Science+Business, 2009.
- [27] J. Sidman, On the Castelnuovo-Mumford regularity of products of ideal sheaves, Adv. Geom. 2 (2002), 219–229.
- [28] R.Y. Sharp, Steps in commutative algebra, Cambridge University Press. 1990.
- [29] C.A. Weibel, An Introduction to Homological Algebra, Cambridge University Press, New York, 1994.
- [30] O. Zariski, P. Samuel, Commutative Algebra. Vol. I, II, Springer (1960).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Probabilistic	احتمالی
Valuation	ارزیابی
Measure	اندازه
Stably	پای‌دار
Weak Topology	توپولوژی ضعیف
Powerdomain	دامنه‌توانی
Function Space	فضای تابع
Semantic Domain	دامنه معنایی
Program Fragment	قطعه برنامه
Regular local	موضعی منظم
Ordered	مرتب

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

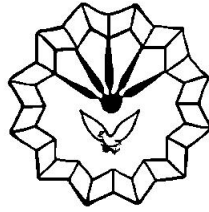
Dcpo	مجموعه جزئاً مرتب کامل جهت‌دار
Function Space	فضای تابع
Measure	اندازه
Ordered	مرتب
Powerdomain	دامنه‌توانی
Probabilistic	احتمالی
Program Fragment	قطعه برنامه
Semantic Domain	دامنه معنایی
Stably	پای‌دار
Valuation	ارزیابی
Weak Topology	توپولوژی ضعیف

Abstract

Let $S = K[x_1, \dots, x_n]$, let M, N be finitely generated graded S -modules, and let $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n) \subseteq S$. We give bounds for the regularity of the local cohomology of $\mathrm{Tor}_k(M, N)$ in terms of the graded Betti numbers of M and N , under the assumption that $\dim \mathrm{Tor}_1(M, N) \leq 1$. We apply the results to syzygies, products and powers of ideals. For example we show that any homogeneous linearly presented \mathfrak{m} -primary ideal has some power equal to a power of \mathfrak{m} ; and if the first $\lceil (n-1)/2 \rceil$ steps of the resolution of I are linear, then I^2 is a power of \mathfrak{m} .

Keywords:

Regularity, Minimal graded free resolution, Local cohomology, Graded betti number



Razi University

**Master of Science
Department of Mathematics**

M.Sc.Thesis

Title of the Thesis

**The regularity of Tor and graded
betti numbers**

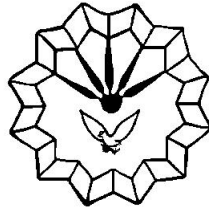
Evaluated and approved by thesis committee : as

Dr. A. Rahimi, Supervisor (Assistant Professor.)

Dr S. Yassemi, External Examiner (Professor.)

Dr S. Rasoulyar, Internal Examiner (Assistant Professor.)

February 2011



Razi University

Master of Science
Department of Mathematics

M.Sc.Thesis

Title of the Thesis

**The regularity of Tor and graded
betti numbers**

Supervisor

Dr. Ahad Rahimi

By

Hassan Noormohammadi

February 2011