همچنین باید توجه داشت که توابع $P^{\pm}(x,\zeta)$ به ترتیب در نیم‌-صفحات بالایی و پایینی اعداد مختلط $\mathbb{C}_{\pm}$ تحلیلی هستند و نیز

$$P^{\pm}(x,\zeta) \longrightarrow I, \qquad \zeta \longrightarrow \infty. \tag{۳۲.۱}$$

معادله‌ی (۳۰.۱) به‌همراه شرایط مجانبی (۳۲.۱) بیان کننده‌ی زیرساخت مسئله‌ای هستند که به اصطلاح آن را "مسئله‌ی ریمان-هیلبرت ماتریسی" می‌گویند. این مسئله را، همانطور که در بخش ۱.۴.۱ خواهیم دید، می‌توان به کمک یک روش شناخته شده به اسم "فرمول پلملج" [1] حل کرد. در ادامه توضیح خواهیم داد که حل این مسئله چه کمکی به یافتن تابع پتانسیل $u(x,t)$ به‌عنوان جواب معادله‌ی (۸.۱) خواهد کرد.

۲.۳.۱ بازسازی تابع پتانسیل از روی جواب مسئله‌ی ریمان-هیلبرت

در این زیربخش، ابتدا فرض می‌کنیم که جواب مسئله‌ی ریمان هیلبرت، یعنی توابع $P^{\pm}$ به‌دست آمده باشند و روند یافتن جواب معادله دیفرانسیل غیرخطی شرودینگر مرتبه بالا (۸.۱) از روی این توابع را بیان خواهیم کرد. در ابتدا توابع $P^{\pm}(x,\zeta)$ را برای مقادیر بسیار بزرگ $\zeta \in \mathbb{R}$ به‌صورت زیر بسط می‌دهیم

$$P^{\pm}(x,\zeta) = I + \zeta^{-1}P_1^{\pm}(x) + \zeta^{-2}P_2^{\pm}(x) + O(\zeta^{-3}), \quad \zeta \longrightarrow \infty. \tag{۳۳.۱}$$

اکنون با یادآوری این نکته که این توابع به ترتیب در مسائل پراکندگی (۱۲.۱) و (۲۳.۱) صدق می‌کنند، برای تابع $P^{+}(x,\zeta)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\left(I + \zeta^{-1}P_1^{+}(x) + \zeta^{-2}P_2^{+}(x) + O(\zeta^{-3})\right)_x &= -i\zeta\left[\Lambda, I + \zeta^{-1}P_1^{+}(x)\right.\\ \left. + \zeta^{-2}P_2^{+}(x) + O(\zeta^{-3})\right] &+ Q\left(I + \zeta^{-1}P_1^{+}(x) + \zeta^{-2}P_2^{+}(x) + O(\zeta^{-3})\right).\end{aligned}$$

به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که

$$\zeta^{-1}(P_1^{+})_x + O(\zeta^{-2}) = \left(Q - i[\Lambda, P_1^{+}]\right) + \zeta^{-1}\left(QP_1^{+} - i[\lambda, P_2^{+}]\right) + O(\zeta^{-2}).$$

با مقایسه‌ی ضرایب توان‌های یکسان ζ در دوطرف تساوی فوق، به نتیجه‌ی بسیار جالبی دست خواهیم یافت. اگر روند مشابهی را برای تابع $P^{-}(x,\zeta)$ انجام دهیم، به نتیجه‌ی قابل توجه دیگری

[1] [illegible]