فصل ۱

مشتق

۱.۱ قضیه‌ی لبگ - رادون - نیکودیم

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فضای اندازه‌پذیر است و μ, υ دو اندازه روی $(\Omega, \mathcal{F})$ باشند. μ را اندازه‌ی مغلوب شده به وسیله‌ی υ یا مطلقا پیوسته نسبت به υ گوییم و می‌نویسیم $\mu \ll \upsilon$، اگر

$$\forall A \in \mathcal{F} : \upsilon(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0 \tag{۱.۱}$$

مثال ۱.۱.۱. فرض کنید m اندازه‌ی لبگ روی $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ و μ توزیع نرمال استاندارد باشد، یعنی

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}\, m(dx), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

در این صورت $m(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$، و از این‌رو $\mu \ll m$.

مثال ۲.۱.۱. فرض کنید $\mathbb{Z}_+ \equiv \{0, 1, 2, ...\}$ مجموعه‌ی تمام اعداد صحیح نامنفی است. فرض کنید υ روی $\Omega = \mathbb{Z}_+$ اندازه‌ی شمارشی، و μ توزیع پواسون (λ) با $0 < \lambda < \infty$ است، یعنی

$$\mu(A) = \sum_{j \in A} \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} \quad \text{و} \quad \upsilon(A) = \text{تعداد اعضای } A$$

برای هر $A \in \mathcal{P}(\Omega)$، مجموعه‌ی توانی A، چون $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow A = \phi \Leftrightarrow \upsilon(A) = 0$ نتیجه می‌شود که $\mu \ll \upsilon$ و $\upsilon \ll \mu$.

مثال ۳.۱.۱. فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega, \mathcal{F}, \upsilon)$ باشد، قرار دهید

$$\mu(A) = \int_A f d\upsilon, \quad \forall A \in \mathcal{F} \tag{۲.۱}$$

در این صورت μ روی $(\Omega, \mathcal{F})$ یک اندازه است و برای هر $A \in \mathcal{F}$، $\upsilon(A) = 0 \Leftrightarrow \mu(A) = 0$ و در نتیجه $\mu \ll \upsilon$.

قضیه‌ی رادون - نیکودیم نوعی بحث راجع به مثال ؟؟ است. که می‌گوید اگر μ, υ روی فضای اندازه‌ی $(\Omega, \mathcal{F})$ اندازه‌های $\sigma-$ متناهی باشند (بخش ۲.۱ را ببینید) و $\upsilon \ll \mu$، آن‌گاه یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی f روی $(\Omega, \mathcal{F})$ وجود دارد به طوری که (؟؟) برقرار است.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فضای اندازه‌پذیر است و μ, υ دو اندازه روی $(\Omega, \mathcal{F})$ باشند. در این صورت μ نسبت به υ تکین است و به صورت $\mu \perp \upsilon$ نوشته می‌شود اگر $B \in \mathcal{F}$ وجود داشته باشد به طوری‌که:

$$\mu(B) = 0, \quad \upsilon(B^C) = 0 \tag{۳.۱}$$

توجه داشته باشید که وقتی μ نسبت به υ تکین است آن‌گاه υ نیز نسبت به μ تکین است. بنابراین مفهوم تکینگی بین دو اندازه‌ی μ, υ متقارن است اما پیوستگی مطلق این چنین نیست. توجه داشته باشید که اگر μ, υ متقابلاً تکین باشند و B در (؟؟) صدق کند آن‌گاه برای هر $A \in \mathcal{F}$،

$$\upsilon(A) = \upsilon(A \cap B), \quad \mu(A) = \mu(A \cap B^C) \tag{۴.۱}$$

مثال ۴.۱.۱. فرض کنید μ اندازه‌ی لبگ روی $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ باشد و υ به صورت تعداد عناصر $\upsilon(A) = A \cap \mathbb{Z}$ تعریف شود که $\mathbb{Z}$ مجموعه‌ی اعداد صحیح است. پس $\upsilon(\mathbb{Z}^C) = 0, \mu(\mathbb{Z}) = 0$ و از این‌رو (؟؟) با $B = \mathbb{Z}$ برقرار می‌شود. بنابراین μ, υ متقابلاً تکین هستند.

مثال دیگر از این رابطه m و μ_c در $[0, 1]$ است که μ_c اندازه‌ی لبگ - اشتیلیتس ایجاد شده توسط کانتور است (رجوع کنید به بخش ۵.۴) و m اندازه‌ی لبگ است.

مثال ۵.۱.۱. فرض کنید μ تحدید اندازه‌ی لبگ بر $[-\infty, 0]$ و υ توزیع نمایی (۱) باشد. یعنی، برای هر $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$،

$$\mu(A) = A \cap (-\infty, 0] \text{ اندازه‌ی لبگ}$$

$$\upsilon(A) = \int_{A \cap (0, \infty)} e^{-x} dx$$

در این صورت $\upsilon((-\infty,0]) = 0, \mu((0,\infty)) = 0$ و (؟؟) با $B = (-\infty, 0]$ برقرار می‌شود.

فرض کنید که υ, μ دو اندازه‌ی متناهی بر فضای اندازه‌پذیر $(\Omega, \mathcal{F})$ باشند. لبگ نشان داد که μ_1 را می‌توان به صورت مجموع دو اندازه تجزیه کرد یعنی،

$$\mu = \mu_a + \mu_s$$

که در آن $\mu_s \perp \upsilon, \mu_a \ll \upsilon$.

قضیه‌ی بعد نتیجه‌ی اصلی این بخش است و ترکیب نتیجه‌ی لبگ و قضیه‌ی رادون - نیکودیم می‌باشد که به زودی بیان می‌گردد.

قضیه ۱.۱.۱. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فضای اندازه‌پذیر است و μ_2, μ_1 دو اندازه‌ی $\sigma-$ متناهی بر $(\Omega, \mathcal{F})$ هستند.

الف) (قضیه‌ی تجزیه‌ی لبگ). اندازه‌ی μ_1 به طور یکتا به صورت زیر تجزیه می‌شود،

$$\mu_1 = \mu_{1a} + \mu_{1s} \tag{۵.۱}$$

که μ_{1s}, μ_{1a} اندازه‌های $\sigma-$ متناهی بر $(\Omega, \mathcal{F})$ هستند به طوری که $\mu_{1a} \ll \mu_2$ و $\mu_{1s} \perp \mu_2$.

ب) (قضیه‌ی رادون - نیکودیم). تابع اندازه‌پذیر نامنفی h روی $(\Omega, \mathcal{F})$ وجود دارد به طوری که

$$\mu_{1a}(A) = \int_A h d\mu_2 \quad , \forall A \in \mathcal{F} \tag{۶.۱}$$

برهان. حالت اول، فرض کنیم μ_2, μ_1 دو اندازه‌ی متناهی باشند و $\mu = \mu_1 + \mu_2$ و $H = L^2(\mu)$. تابع خطی T را روی H به صورت

$$T(f) = \int_A f d\mu_1 \tag{۷.۱}$$

تعریف می‌کنیم. با اعمال نامساوی کوشی - شوارتز برای توابع f و $g \equiv 1$ داریم

$$|T(f)| \leq \left(\int f^2 d\mu_1 \right)^{\frac{1}{2}} (\mu_1(\Omega))^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int f^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} (\mu_1(\Omega))^{\frac{1}{2}}$$

این نشان می‌دهد که T یک تابعک خطی کراندار روی H است و $\|\| \leq M \equiv (\mu_1(\Omega))^{\frac{1}{2}}$.

از قضیه‌ی نمایش ریس، تابع $g \in L^2(\mu)$ وجود دارد (رجوع کنید به قضیه‌ی ۳.۳.۳ و ملاحظه‌ی ۲.۳.۳) به طوری که برای هر $f \in L^2(\mu)$

$$T(f) = \int_A fgd\mu \tag{۸.۱}$$

فرض کنید $f = I_A$ برای هر A در $\mathcal{F}$. در این صورت بنابر (؟؟) و (؟؟)

$$\mu_1(A) = T(I_A) = \int_A gd\mu$$

اما برای هر $A \in \mathcal{F}$، $0\mu_1(A) \leq \mu(A)$. از این‌رو تابع g در $L^2(\mu)$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند،

$$0 \leq \int_A gd\mu \leq \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{F} \tag{۹.۱}$$

فرض کنید $A_3 = \{g \notin [0,1]\}, A_2 = \{g = 1\}, A_1\{0 \leq g < 1\}$. در این صورت بنابر (؟؟) $\mu(A_3) = 0$ (مسئله‌ی ۱.۴ را ببینید). حال $\mu_{1s}(.), \mu_{1a}(.)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mu_{1a}(A) \equiv \mu_1(A \cap A_1), \mu_{1s}(A) \equiv \mu_1(A \cap A_2) \quad \forall A \in \mathcal{F} \tag{۱۰.۱}$$

و بعد نشان می‌دهیم که $\mu_{1s} \perp \mu_2, \mu_{1a} \ll \mu_2$، و در نتیجه (؟؟) بنابر (؟؟) و (؟؟) برای هر $f \in H$ برقرار است.

$$\int fgd\mu_1 = \int fgd\mu = \int fgd\mu_1 + \int fgd\mu_2 \Rightarrow \int f(1-g)d\mu_1 = \int fgd\mu_2 \tag{۱۱.۱}$$

با قرار دادن $f = I_{A2}$ نتیجه می‌گیریم $0 = \mu_2(A_2)$.

از (؟؟) و $\mu_{1s}(A_2^c) = 0$ نتیجه می‌گیریم که $\mu_{1s} \perp \mu_2$. حال برای $n \geq 1$ ثابت و $A \in \mathcal{F}$ فرض کنید $f = I_{A\cap A_1} g(1 + g + ... + g^{n-1})d\mu_2$. در این صورت (؟؟)

$$\int_{A\cap A_1} (1 - g^n)d\mu_1 = \int_{A\cap A_1} g(1 + g + ... + g^{n-1})d\mu_2$$

حال وقتی $n \to \infty$، با استفاده از MCT در هر دو طرف، نتیجه می‌گیریم که

$$\mu_{1a}(A) = \int_A I_{A_1} \frac{g}{(1-g)} d\mu_2 \tag{۱۲.۱}$$

قرار می‌دهیم $h \equiv \dfrac{g}{(1-g)} I_{A_1}$ تا برهان (؟؟) و (؟؟) کامل شود.

حالت دوم، حال فرض کنید که μ_2, μ_1، اندازه‌های $\sigma-$ متناهی هستند. پس افراز شمارای $\{D_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ از Ω وجود دارد به طوری که $\mu_1(D_n)$ و $\mu_2(D_n)$ برای هر $n \geq 1$ متناهی‌اند. فرض کنید $\mu_2^{(n)}(.) \equiv \mu_2(. \cap D_n), \mu_1^{(n)}(.) \equiv$ $\mu_1(. \cap D_n)$. در این صورت با استفاده از حالت اول برای $\mu_2^{(n)}, \mu_1^{(n)}$ به ازای هر $n \geq 1$ می‌توان اندازه‌های $\mu_{1s}^{(n)}, \mu_{1a}^{(n)}$ و تابع h_n را به دست آورد به طوری که

$$\mu_1^{(n)}(.) \equiv \mu_{1a}^{(n)}(.) + \mu_{1s}^{(n)}(.) \tag{۱۳.۱}$$

که در آن برای هر A در $\mathcal{F}$، $\mu_{1a}^{(n)}(A) = \int_a h_n d\mu_2^{(n)} = \int_A h_n I_{D_n} d\mu_2$ و $\mu_{1s}^{(n)} \perp \mu_2^{(n)}$. از آن جایی که $\mu_1(.) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1^{(n)}(.)$ از (؟؟) نتیجه می‌شود که

$$\mu_1(.) = \mu_{1a}(.) + \mu_{1s}(.) \tag{۱۴.۱}$$

که $\mu_{1a}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{1a}^{(n)}(A)$ و $\mu_{1s}(.) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{1s}^{(n)}(.)$. بنابر MCT،

$$\mu_{1a}(A) = \int_A h d\mu_2, \quad A \in \mathcal{F}$$

که $h \equiv \sum_{n=1}^{\infty} h_n I_{D_n}$.

به وضوح $\mu_{1a} \ll \mu_2$. اثبات منفرد بودن μ_1, μ_1 به عنوان تمرین رها شده است (مساله‌ی ۲.۴)

اثبات یکتایی تجزیه باقی می‌ماند. فرض کنید $\mu_1 = \mu_a' + \mu_s', \mu_1 = \mu_a + \mu_s$ دو تجزیه از μ_1 باشند که μ_a', μ_a نسبت به μ_2 مطلقا پیوسته‌اند و μ_s', μ_s نسبت به μ_2 منفردند.

بنابر تعریف، مجموعه‌های B', B در $\mathcal{F}$ وجود دارند به طوری که

$$\mu_2(B) = 0, \mu_2(B') = 0, \mu_s(B^c) = 0, \mu_s'(B'^c) = 0$$

فرض کنید در این صورت . به طور مشابه . هم‌چنین نتیجه می‌دهد که . بنابراین برای هر ، هم‌چنین بنابراین و پس برای هر ، بنابراین . و در نتیجه . □

ملاحظه ۱.۱.۱. در قضیه‌ی فرض متناهی بودن را نمی‌توان حذف کرد. به عنوان مثال فرض کنید اندازه‌ی لبگ و اندازه‌ی شمارشی روی باشد. در این صورت اما تابع نامنفی اندازه‌پذیر وجود ندارد به طوری که . برای اثبات، فرض کنید برای

و برای هر ، . توجه نمایید که نتیجه می‌دهد و از این‌رو شماراست (مسئله‌ی ۳.۴). اما اگر اندازه‌ی لبگ باشد آن‌گاه و .
زیرا بنابر تعریف، روی ، و در نتیجه که یک تناقض است. در هر حال، اگر ، متناهی باشد و (الزاماً متناهی نیست) در این صورت قضیه‌ی رادون - نیکودیم برقرار است، یعنی تابع اندازه‌پذیر وجود دارد به طوری که برای هر ،

برای اثبات رویدن (۱۹۸۸) فصل ۱۱ را ببینید.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید اندازه‌هایی روی یک فضای اندازه‌پذیر باشند و یک تایع اندازه‌پذیر نامنفی باشد به‌طوری که

در این صورت را مشتق رادون - نیکودیم نسبت به می‌نامیم و به صورت زیر می‌نویسیم،

اگر و دو تابع اندازه‌پذیر نامنفی وجود داشته باشند به طوری که برای هر ، ، آن‌گاه و مشتق رادون - نیکودیم در هم ارزی یکتاست. این مطالب به حالتی که ، متناهی است نیز قابل تعمیم است.

بررسی گزاره‌ی زیر ساده است (به مسئله‌ی ۴.۴ رجوع کنید)

گزاره ۱.۱.۱. فرض کنید اندازه‌هایی متناهی روی یک فضای اندازه‌پذیر باشند.

الف) اگر آن‌گاه و

ب) فرض کنید که هر دو اندازه‌ی به وسیله‌ی مغلوب شوند. در این صورت برای هر ، توسط مغلوب می‌شود و

پ) اگر و آن‌گاه و

ت) فرض کنید یک دنباله از اندازه‌ها باشد و یک دنباله از اعداد حقیقی مثبت است، یعنی برای هر . تعریف کنید . در این صورت

اولاً) اگر و تنها اگر برای هر ، و در این حالت

ثانیاً) اگر و تنها اگر برای هر ، .

۲.۱ اندازه‌های علامت

فرض کنید μ_2, μ_1 دو اندازه‌ی متناهی روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega, \mathcal{F})$ باشند. فرض کنید برای هر $A \in \mathcal{F}$

$$\upsilon(A) \equiv \mu_1(A) - \mu_2(A) \qquad (۱۵.۱)$$

در این صورت $\upsilon : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) $\upsilon(\phi) = 0$

ب) برای هر ، و برای هر ، و ،

فرض کنید

در این صورت متناهی است.

توجه داشته باشید که (پ) برقرار است زیرا .

تعریف ۱.۲.۱. تابع مجموعه‌ای که در شرایط (الف)، (ب)، (پ) بالا صدق کند یک اندازه علامت متناهی نامیده می‌شود.

مثال بالا نشان می‌دهد که تفاضل دو اندازه‌ی متناهی یک اندازه علامت متناهی است. در زیر نشان خواهیم داد که هر اندازه علامت متناهی را می‌توان به صورت تفاضل دو اندازه‌ی متناهی بیان کرد.

گزاره ۱.۲.۱. فرض کنید یک اندازه علامت متناهی روی باشد، قرار دهید

در این صورت یک اندازه‌متناهی روی است.

برهان. نتیجه‌ای از قسمت سوم تعریف است. بنابراین کافی است ثابت کنیم که جمعی شماراست. فرض کنید یک خانواده‌ی شمارا از مجموعه‌های جدا از هم در است و . از تعریف برای هر و ، خانواده‌ی شمارای از مجموعه‌های جدا از هم در وجود دارد که به طوری که ، و از این رو

توجه داشته باشید که خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌های جدا از هم در است به طوری که . از تعریف نتیجه می‌شود که

از آن جایی که رابطه‌ی بالا برای هر درست است، لذا

برای به دست آوردن نامساوی عکس، فرض کنیم یک خانواده‌ی شمارا از مجموعه‌های مجزا در باشد، به طوری که .

چون و در

صادق است، لذا برای هر ، بنابراین

توجه داشته باشید که برای هر ، یک خانواده‌ی شمارا از مجموعه‌های جدا از هم در است به طوری که . از این‌رو از

نتیجه می‌شود که و در نتیجه

از

نتیجه می‌شود که . از آن جا که این برای هر خانواده‌ی درست است، از

نتیجه می‌گیریم که:

و با

اثبات کامل می‌شود. □