فهرست مطالب

فصل اوّل شامل مقدمه و تعاریف پایه ای موردنیاز در فصول آینده است.

مرجع اصلی مقاله

"Tripled Best Proximity Point Metric Spaces، Volume ۱۶، Number ۴ (۲۰۱۳)، ۱۱۹۷ ـ ۱۲۱۶".

در فصل دوم تعاریف و قضایای اصلی نقطه بهترین تقریب سه تایی و زوج انقباض های دوری در فضای متریک و فضای متریک کامل با ویژگی های UC و *UC را مورد بررسی و اثبات قرار می دهیم.

در فصل سوم قضیه بهترین نقطه ثابت سه تایی در فضای متریک و نتایج حاصل از آن را بیان می کنیم.

منابع مورد استفاده:

۱. On Best Proximity Point in b-metric Space Volume ۲۰۱۵، Issue ۱، year ۲۰۱۵

۲. Global Optimal Solution of Best Proximity Points for generalized contraction proximity maps، ۲۰۱۳، poom Kumam.

تاریخچه

در چند دهه اخیر نظریه نقاط ثابت به عنوان شگردی مهم در مطالعه آنالیز تابعی غیر خطی ظهور کرده است به خصوص شگردها و ابزار قضیه نقطه ثابت در شاخه های بسیاری از ریاضی کاربردی و نیز در بسیاری از حوزه‌های تحقیقاتی چون فیزیک، شیمی، زیست شناسی، اقتصاد، علوم رایانه و شاخه های مهندسی بکار می‌روند.

مهمترین نتیجه در نظریه نقطه ثابت که آن را به عنوان اصل نگاشت انقباضی باناخ [۱] می‌شناسیم توسط باناخ در سال ۱۹۹۲ ارائه شده است. [۴]

این اصل بیان می کند که:

هر انقباضی $T : X \to X$ روی یک فضای متری کامل [۲] (X, d) دارای نقطه ثابت یکتایی است یعنی اینکه $x \in X$ وجود دارد که $Tx = x$ این اصل طی سالیان گذشته دچار تعمیم روی فضاهای مجرد متنوع نیز شده است.

به طور دقیق تر برای زیر مجموعه های بسته ناتهی داده A, B از فضای متریک کامل (X, d) یک نگاشت انقباضی $T : A \to B$ لزوماً یک نقطه ثابت را نتیجه نمی دهد یعنی $d(Tx, x) \neq 0$. در این حالت طبیعی است که عضو $x \in X$ بررسی می شود که $d(Tx, x)$ کمینه شود یعنی نقاط Tx, x همجوار نزدیک هستند.

فرض کنید A, B زیر مجموعه های بسته از فضاهای متریک (X, d) باشند و $T : A \to B$ یک نگاشت انقباضی باشد نقطه x در A که برایش $d(x, Tx) = d(A, B)$ یک نقطه تقریبی T نامیده می شود اگر $A \cap B = \emptyset$ در این صورت بهترین نقطه تقریبی [۳] روی T نامیده می شود. به زبان دیگر از آنجا که یک نقطه تقریبی قابل کاهش به یک نقطه ثابت است. در صورتی که نگاشت مربوط یک نگاشت همانی باشد. قضایای نقاط تقریبی تعمیم های طبیعی هستند. [۲،۱۰،۱۱،۲۳]

[۱] Banach Contraction Mapping Principle (BCMP)
[۲] Complete Metric Space
[۳] Best Proximity Point

به بیان دیگر:

برای داشتن یک کران پایین ملموس باید دو زیر مجموعه ناتهی A, B از یک فضاهای متریک X را همراه با یک نگاشت $T : A \to B$ در نظر بگیریم.

سوال طبیعی این است که آیا می توان عضو $x. \in A$ را یافت به طوری که داشته باشیم:

$$d(x., Tx.) = \min\{d(x, Tx) : x \in A\}$$

از آن جایی که $d(x., Tx.) \geq d(A, B)$ راه حل بهینه مسئله کمینه سازی تابع با مقدار حقیقی $x \to d(x, Tx)$ حول دامنه A مربوط به نگاشت T از نوعی خواهد بود که مقدار $d(A, B)$ برای آن حاصل شود یک نقطه $x. \in A$ یک نقطه تقریبی نزدیک T خوانده می شود اگر

$$d(x., Tx.) \geq d(A, B)$$

توجه کنید که اگر $d(A, B) = ۰$ در این صورت بهترین نقطه تقریبی چیزی نیست مگر نقطه ثابتی از T.

سابقه بهترین نقطه توسط فان[۴] [۱۳] در سال ۱۹۶۹ بیان گردید. این نظریه به صورت زیر می باشد.

اگر A یک زیر مجموعه ناتهی فشرده محدب از یک فضای برداری توپولوژیکی موضعاً محدب هاسدورف X با نیم ـ نرم P و $T : A \to B$ یک نگاشت پیوسته باشد آن گاه عضوی مانند x در A وجود دارد به طوری که:

$$d_p(x, Tx) = d_p(Tx, A)$$

پس از ارائه این ایده توسیع ها و صورت های مختلفی از قضیه فان از جمله تحقیقات ریچ[۵] در سال ۱۹۷۸ و پرولا[۶] [۲۷] در سال ۱۹۸۳ و سهگال ـ سن[۷] [۲۸،۲۹] در سال ۱۹۸۸ می توان اشاره کرد.

یک مفهوم جالب و عمده همان مفهوم نقطه ثابت جفت[۸] شده است که توسط گو و لاکش می کان تام[۹]

[۴] Ky. Fan
[۵] S, Reich
[۶] J. B. Prolla
[۷] V.M. Sehgal
[۸] Coupled Fixed Point
[۹] Guo – Lakshmikan Tham

در سال ۱۹۸۷ ارائه شده است. [۱۵]

بهاشکار[۱۰] و لاکش کان تام [۱۴] در ۲۰۰۶ به معرفی نگاشت یکنوای مخروط پرداختند و به اثبات برخی قضایای نقطه ثابت پیوسته برای نگاشت هایی پرداختند که واجد ویژگی یکنوایی مخلوط هستند.

مولفین مشاهده کردند که قضایای آنها برای بررسی رده بزرگی از مسائل قابل استفاده است و به بحث درباره وجود یکتایی جواب برای یک مسئله مقدار مرزی متناوب پرداختند. بسیاری از بهبودها و تعمیم ها اخیراً در ادبیات ریاضی رخ نموده اند.

محققین دیگری در دهه گذشته وجود بهترین تقریب نقطه ای را برای انواع انقباض ها مورد بررسی قرار دادند. از جمله می توان به کارهای الدرد و یرمانی[۱۱] [۱۲] در سال ۲۰۰۶ و باری و سوزوکی[۱۲] در سال ۲۰۰۸ و وترو ـ کیکاوا[۱۳] ـ سوزوکی در سال ۲۰۰۹ اشاره کرد. [۳، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲]

سابقه اولین بررسی و تحقیق بهترین تقریب نقطه سه تایی در فضاهای متریک برای انقباض ها و نگاشت های انقباض توسط ال ـ تقفی[۱۴] و شهرزاد[۱۵] و کارپاگام[۱۶] و اگراوال[۱۷] در سال ۲۰۰۹ و رضاپور[۱۸] و لدارسکی و در سال ۲۰۱۰ و ترو[۱۹] و شهرزاد و سان کار راج[۲۰] در ۲۰۱۱ و درافشور[۲۱] در ۲۰۱۱ مورد بررسی قرار گرفت.

در سال ۲۰۱۱ صدیق پاشا[۲۲] قضایای وجود بهترین تقریب نقطه را برای نوعی از انقباض[۲۳]ها به نام انقباض های تقریب زننده نوع اول و دوم بیان کرد.

فرض کنید X یک فضای متریک کامل و A, B دو زیر مجموعه ناتهی بسته از X باشند به طوری که A موضعاً فشرده نسبت به A. یعنی هر نقطه اش همسایگی با بست فشرده داشته باشد و B ناتهی باشند و $T : A \to B$ یک نگاشت و $g : A \to A$ یک ایزومتری باشد که در شرایط زیر صدق کنند. ۱ـ T یک

[۱۰] Bhashkar
[۱۱] A. Eldred- P. Veeramani
[۱۲] C. Di bari-T.Suzuki
[۱۳] Vetro – M.Kilawa
[۱۴] Al-thagafi
[۱۵] Shahzadgal
[۱۶] karpagam
[۱۷] Agrawal
[۱۸] Rezapour
[۱۹] Wlodarczyk
[۲۰] Sankar Raj
[۲۱] Derafshour
[۲۲] Sadiq Basha
[۲۳] Contraction

انقباض تقریب زننده پیوسته از نوع دوم است.

۲ ـ G یک ایزومتری است.

۳ـ $T(A_\circ) \in B_\circ$.

۴ ـ T نگهدارنده ایزومتری فاصله نسبت به g می باشد.

آنگاه عنصری مانند X در A وجود دارد که

$$d(x,Tx) = d(A_\circ, B_\circ) = \min\{d(x,y) : x \in A, y \in B\}$$

$$A_\circ = \{x \in A \mid d(x,y) = d(A,B) \exists y \in B\}$$

$$B_\circ = \{y \in B \mid d(x,y) = d(A,B) \exists x \in A\}$$

$A \supset A_\circ$ و $B \supset B_\circ$ و مشمول در مرزهای A و B هستند در صورتی که A و B زیر مجموعه های بسته از یک فضای خطی نرم دار باشند به طوری که $d(A,B) > \circ$ (صدیق پاشا ویرمانی ۲۰۰۰)[۵،۶،۷،۸].

در دهه گذشته بریندی[۲۴] و بورکات[۲۵] به معرفی مفاهیم نقطه ثابت سه تایی پرداختند. آنها بر اثبات نتایج وجود یکتایی نقطه ثابت سه تایی در یک فضای متری کامل و به طور جزیی مرتب پرداختند. از طرف دیگر مفهوم بهترین نقطه تقریبی متصل دوتایی ویژگی UC^* در ابتدا توسط سین تاناوارات[۲۶] و کومام[۲۷] معرفی شده اند. آنها همچنین به ارائه قضایای وجود و همگرایی مربوط به بهترین نقطه تقریبی متصل برای زوج های انقباضی دوری پرداخته اند.

نقطه $x \in X$ را یک نقطه مرزی A می نامیم هرگاه هر همسایگی حول x و $X - A$ را قطع کند.

با الهام گیری از کارهای جالب ارائه شده ابتدا به معرفی مفاهیم نقطه تقریبی سه تایی و سپس به استخراج قضایای وجود و همگرایی بهترین نقطه تقریبی سه تایی در فضاهای متری می پردازیم. علاوه بر آن این نتایج را در مورد فضاهای باناخ یکنواخت محدب بکار خواهیم برد.

همچنین به بررسی برخی نتایج وجود و همگرایی نقطه ثابت سه تایی در فضاهای متری و ارائه مثال های مصور از قضایا می پردازیم.

---

[۲۴] Berinde
[۲۵] Borcut
[۲۶] Sintunzvarat
[۲۷] Kumam

در سال ۲۰۰۶ الدرد و ویرمانی به اثبات قضیه ای پرداخته اند که وجود یک نقطه تقریبی برای انقباض های دوری در فضاهای متری را تضمین می کند. تضمین وجود یک جواب تقریبی بهینه برای معادله $Tx = x$ در یک فضای متری از کارهای مورد توجه آنها بوده است.

درهم کشیدگی دوری و بهترین نقاط تقریبی در حال حاضر درصدد موضوعات مورد توجه در نظریه نقطه ثابت قرار دارد نخستین نتیجه در این حوزه در سال ۲۰۰۳ توسط کیرک[۲۸] به صورت تعمیمی از انقباض دوری و نقطه ثابت بیان شده است. از آن به بعد بسیاری از محققین بررسی های خود را در این جمعیت ارائه دادند و نتایج فراوانی بدست آوردند که

* فرض کنید (x,d) فضای متریک باشند و A,B زیر مجموعه های ناتهی X باشند نگاشت T روی $A \cup B$ را یک نگاشت دوری می نامند اگر داشته باشیم $T(B) \subset A$ و $T(A) \subset B$ و نقطه $x \in A \cap B$ یک نقطه تقریبی نزدینی نام دارد اگر داشته باشیم

$$d(x,Tx) = d(a,b)$$

جایی که

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\}$$

الدرد و ویرمانی قضیه زیر را ثابت کردند.

* فرض کنید A,B زیر مجموعه های بسته و ناتهی از یک فضای باناخ یکنواخت محدب باشند و همچنین T یک انقباض دوری روی $A \cup B$ باشد یعنی این که $T(B) \subset A$ و $T(A) \subset B$ و نقطه $x \in (0,1)$ چنان موجود باشد که به ازای هر $x \in A$ و $x \in B$ داشته باشیم:

$$d(Ty,Tx) \leq nd(x,y) + (1-r)d(A,B)$$

در این صورت T دارای یک بهترین نقطه تقریبی یکتا چون Z در A است و دنباله $\{Tx\}_{2n}$ به ازای هر $x \in A$ به Z همگراست وجود یک نقطه تقریبی بهینه برای انقباضات دوری تقریبی نقطه به نقطه توسط آنوراها[۲۹] و ویرمانی اثبات شده اند.

[۲۸] W. A. Kirk
[۲۹] Anuradha

در زمینه فضاهای متری کامل بهترین قضایا نقطه تقریبی برای انقباضات تقریبی تعمیم یافته از نوع اول و دوم توسط صدیق پاشا و شهزاد مورد بررسی قرار گرفته اند.

از آنجا که وجود یک جواب تقریبی بهینه برای $Tx = x$ تضمین می شود جایی که $T : A \to B$ یک انقباض تقریبی تعمیم یافته از نوع اول یا یک انقباض تقریبی تعمیم یافته از نوع دوم است. اخیراً بسیاری از فضاهای متری تعمیم یافته با توپولوژی غیر هاسدورف اهمیت یافته اند. یک نوع از چنین فضاهای متری با توپولوژی غیر هاسدورف که فضای متری نام دارد توسط باختین[۳۰] معرفی شده است.

توجه کنید که فضاهای با توپولوژی غیر هاسدورف نقش مهمی را در رویکرد به روش تارسکین[۳۱] نسبت به نحوه زبان های برنامه نویسی به کار رفته در علوم رایانه بازی می کند. به طور دقیق تر اگر x یک نقطه تقریبی بهینه برای نگاشت T باشد که در یک فضای $b-$ متری چون (X, d) تعریف شده است.

تارسکین نسبت به نحوه زبان های برنامه نویسی به کار رفته در علوم رایانه بازی می کند. به طور دقیق تر اگر x یک نقطه تقریبی بهینه برای نگاشت T باشد که در یک فضای $b-$ متری چون (X, d) تعریف شده است.

x ممکن است که بهترین نقطه همگرایی و تقریبی برای همان نگاشت T نباشد که در این صورتی که تعریف در فضای متری (X, d) صورت گرفته باشد و عکس این قضیه هم صادق است.

بررسی وجود بهترین نقاط تقریبی برای نگاشت های تعریف شده در فضاهای تعمیم یافته متنوع اهمیت پیدا می کند.

یک زوج همگرایی بهینه به صورت تعمیمی از بهترین تقریب رخ می نماید که بررسی شرایط کافی برای وجود بهترین نقطه همگرایی تقریبی است به زبان دیگر شرایط کافی برای تضمین وجود عضو $x \in X$ به ازای دو زیر مجموعه A, B در فضای متری (X, d) با ویژگی نگاشت

$$T : A \cup B \to A \cup B$$

$$d(x, Tx) = dist(A, B)$$

[۳۰] A.Bakhtin
[۳۱] Tarskian

در جایی که

$$dist(A, B) = \inf d(a, b)$$

$$(a, b) \in A \times B$$

در این حالت می گوییم که x یک نقطه بهینه تقریبی برای T نسبت به A, B است. روشن است که اگر x یک نقطه تقریبی بهینه برای T باشد در این صورت $dist(a, b)$ اگر و تنها اگر x یک نقطه ثابت برای T باشد.

Abstract

The purpose of this article is to first introduce the notion of tripled best proximity point and cyclic contraction pair. We also establish the existence and convergence theorems of tripled best proximity points in metric spaces. Moreover, we apply our results to setting of uniformly convex Banach space. Finally, we obtain some results on the existence and convergence of tripled fixed point in metric spaces and give illustrative examples of our theorems.

Payame Noor University

Departmentpure mathematic group-analysis

Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the

Degree of M.Sc in shaegh-tehran center

Title:

Tripled best proximity point theorem in metric spaces

Supervisor:

Dr. ghasem alizade afrouzi Author

By:

Hadi eghlimi

2015