کاربردهای توپولوژی

محمدمحمدی

شهریور ۱۳۹۴

فهرست مطالب

چکیده

چندین قانون درخصوص توپولوژی از گروههای پارا توپولوژیک و نیمه توپولوژیک به اثبات رسیده است. این ثابت شده است که هر گروه پارا توپولوژیک شبه متریک پذیر[1] با ویژگی بئر یک گروه توپولوژیک است اگریک گروه پاراتوپولوژیک G پیش تصویری از یک گروه توپولوژیک تحت نگاشت هومومورفیسم باشد آنگاه خود G نیز یک گروه توپولوژیک است .اگر یک گروه پاراتوپولوژیک G اشتراک شمارش پذیر از زیر مجموعه های باز و چگال [2]از فضای فشرده نمای منتظم X باشد آنگاه G یک گروه توپولوژیک است .
اگر یک گروه پاراتوپولوژیک H تصویری از یک گروه کاملا کراندار G تحت یک نگاشت هومومورفیسم پیوسته باشدآنگاه H نیز یک گروه توپولوژیک است . اگر یک گروه نیمه توپولوژیک شمارای نوع اول G در فشرده شده هاسدورف G ، G_δ-چگال باشدآنگاه G یک گروه توپولوژیک متریک پذیربا متریک کامل است.
همچنین ارتباط جدیدمعینی بین پایایی کاردینال های پایه فضاهای پاراتوپولوژیک و نیمه توپولوژیک ثابت می کنیم.
درحقیقت این ثابت می شود که اگر G یک گروه پاراتوپولوژیک دنباله ای مثل $G \times G$ نرمال باشد آنگاه G پایه ای شمارا دارد.این مسیری را مشخص می کند که چرا مربع خط سورجنفری[3]نرمال نیست .

---

[1] symmetrizable

[2] G_δ

[3] sorgenfrey

۱.۰ مقدمه

چه موقع یک گروه پاراتوپولوژیک گروه توپولوژیک است ؟
می دانیم ، هر گروه نیمه توپولوژیک هاسدورف موضعا فشرده ، یک گروه توپولوژیک است (۱۲-۳-۲ از مقاله اصلی).[۸]
اخیرا بوزیاد این قضیه را به فضاهای فشرده چخ گسترش داد ونتیجه وسیعی از آن بدست آورد.در سال ۱۹۷۵، Ellis نشان دادکه هر گروه پاراتوپولوژیک موضعا فشرده یک گروه توپولوژیک است .(۴-۶ و [۸])
همچنین W.zelazko [۲۰-۴] نشان داد هر گروه پارا توپوپولوژیک متریک پذیریک گروه توپولوژیک است . بعدا در سال ۱۹۸۲ [۴–۳]N.Brand، یافته های Ellis ، zelazko را تعمیم داد و اثبات کردکه هرگروه پاراتوپولوژیک یک گروه توپولوژیک فشرده چخ است .اثبات جدیدوکوتاهتری از این قضیه بعد از سه سال ارائه شد[۱۷–۴]واین سالها معروف بود که ؛هر گروه موضعا فشرده یا هر گروه نیمه توپولوژیک کاملا متریک پذیر یک گروه پاراتوپولوژیک است .این قضیه H-pfister را برآن داشت که بپرسد آیا :
-هر گروه فشرده چخ نیمه توپولوژیک یک گروه پارا توپولوژیک است ؟[۱۷-۴]واز این رو بنا برقضیه Brand یک گروه توپولوژیک است ؟ [۴]
ثابت می کنیم که هر گروه پاراتوپولوژیک هاسدورف متریک پذیر با ویژگی بئر یک گروه توپولوژیک است این تعمیم یافته قضیه کلاسیک montgomery است [۱۱]همچنین در شاخه ای حرکت می کنیم که به نظر می رسد جدید است ونماینده خوبی برای دو نتیجه زیر است :
–اگرگروه پاراتوپولوژیک Gپیش تصویری از یک گروه توپولوژیک تحت نگاشت همومورفیسم کامل باشد آنگاه G نیز گروه توپولوژیک است .
–اگر گروه پاراتوپولوژیک Hتصویری از گروه توپولوژیک کلا کراندارG تحت نگاشت همومورفیسم پیوسته باشد ،آنگاه H نیز گروه توپولوژیک است.
-ما همچنین ثابت می کنیم اگر گروه نیمه توپولوژیک شمارای نوع اول G در فشرده شده هاسدورف G_δ-چگال باشد آنگاه G با متریک کامل یک گروه توپولوژیک متریک پذیر است . این یک نتیجه سریع از قضیه رزنیچکو [۱۴] است .
درمرحله دوم ؛
رابطه جدیدمعینی بین پایایی کاردینال های پایه در گروههای توپولوژیک اثبات می کنیم . در حقیقت این اثبات می کند که اگر G یک گروه دنباله ای توپولوژیک باشد به طوریکه$G \times G$ لیندولف باشد آنگاه G شبکه شمارا دارد .
تحت (ch) ثابت می کنیم اگر Gگروه پاراتوپولوژیک شمارای نوع اول جدایی پذیر باشد به طوریکه $G \times G$نرمال باشد آنگاه G پایه شمارا دارد.
این موضوع یک امید تازه ای می دهد که چرا مربع خط sorgenfrey نرمال نیست. . [۹][۱۶] تمام توپولوژی های در نظر گرفته شده زیر در اصل موضوع تفکیک T_2 صدق می کنند.
برخی شرایط لازم وکافی توپولوژیک بودن یک گروه پاراتوپولوژیک رامی توان از لم های زیر بدست آورد .

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی از توپولوژی و کاربردهای آن می پردازیم

تعریف ۱. گروه توپولوژیک : فرض کنیم Gیک گروه باشد که فضای توپولوژی است .اگر نگاشتهای $xy \longrightarrow (x,y)$ از $G \times G$ به G و $x^{-1} \longrightarrow x$ از G به G پیوسته باشد آنگاه G یک گروه توپولوژیک است .

تعریف ۲. گروه نیمه توپولوژیک : گروهی است با یک توپولوژی که ضرب در گروه منفک پیوسته است . گروه پارا توپولوژیک :گروهی است با یک توپولوژی که ضرب در گروه پیوسته توام است .

تعریف ۳. فضای توپولوژی : درمجموعه Xگردایه ای مانند τاز زیر مجموعه های X است که در شرایط زیر صدق می کند :

(i) X و τ متعلق بهτ هستند.

(ii) اجتماع هر زیر گردایه τمتعلق به τاست .

(iii) مقطع اعضای هرزیر گردایه متناهی τ متعلق به τ است .

تعریف ۴. فرض پیوستار :در ریاضی فرضی است در باره اندازه مجموعه های بی نهایت که هیچ مجموعه ای وجود ندارد که اندازه اش بین اندازه مجموعه اعدادطبیعی و اعداد حقیقی باشد یا به عبارتی هیچ عدد اصلی مانند xدر نامساوی $\aleph_0 < x < c = 2^{\aleph_0}$صدق کند .یا به بیان دیگر به ازای هر عدد اصلی نامتناهی a،عدداصلی x وجود ندارد که در نامساوی زیر صدق کند . $a < x < 2^a$در این مقاله این فرض تحت عنوان (ch) مطرح شده است .[۱]

تعریف ۵. فضای تیخونف : (فضای هاسدورف کاملا منتظم)یک فضای کاملا منتظم T_0 (یک فضای کاملا منتظم ، هاسدورف است اگر و فقط اگر T_0باشد) هر فضای تیخونف ، هاسدورف منتظم است. فضایی T_0است اگر برای هر جفت نقطه متمایز x و y در فضا وجود داشته باشد مجموعه بازی که شامل x باشد و شامل y نباشد.

[۱] Hypotheses continuum

تعریف ۶. فضای فشرده نما [۲]:یک فضای توپولوژیک فشرده نما گفته می شود اگر تصویر آن تحت هرتابع پیوسته به $\mathbb{R}$ کراندار باشد .
خواص: –شرط لازم وکافی برای فشرده نما بودن فضای تیخونف X این است که هرمجموعه موضعا متناهی از مجموعه های باز ناتهی در X متناهی باشد.
–هر فضای فشرده شمارا و هر فضای فشرده دنباله له ای ، فشرده نما است وبرعکس آن در فضاهای متریک صحیح است .
–اگر Y تصویر پیوسته از فشرده نمای X باشد آنگاه Y فشرده نمااست . توجه کنید که برای توابع پیوسته $h : Y \longrightarrow \mathbb{R}$و$g : X \longrightarrow Y$ترکیب توابع gو hرا که f بنامیم ،تابع پیوسته ای است از X به اعدادحقیقی ، بنا براین f کراندار و Y فشرده نما است .

تعریف ۷. فضای منتظم :فضایی را منتظم [۳]گوییم اگرC یک مجموعه بسته وxیک نقطه که در Cنیست آنگاه Cوxهمسایگی های جدا از هم داشته باشند .

تعریف ۸. پیش پالایه[۴]:خانوادهξازمجموعه هلی Xیک پیش پالایه رویX نامیده می شود اگر$X \in$ ξ وبرای هر مجموعه متناهی $A_1, ..., A_k$از اعضای ξوجود داشته باشد $B \in \xi$به طوریکه $B \subset$ $\bigcap_{i=1}^{k} A_i$اگر بعلاوه از $A \in \xi$ و $A \subset B \subset X$نتیجه شود $B \subset \xi$آنگاه ξ یک فیلتر[۵]رویX نامیده می شود .

تعریف ۹. فضای دنباله ای [۶]:فضایX دنباله است اگر برای هر پیش پالایهη جمع شده دریک نقطه $x \in X$وجود داردیک پیش پالایه

تعریف ۱۰. پیش پالایه [۷]:خانوادهξ از زیر مجموعه های X پیش پالایه روی X نامیده می شود اگر $X \in \xi$ و برای هر مجموعه متناهی $A_1, ..., A_k$ از اعضای ξ وجود داشته باشد $\mathfrak{B}$ به طوریکه $\mathfrak{B} \subset$ $\bigcap_{i=1}^{k} A_i$ وبعلاوه اگر از $A \in \xi$ و $A \subset B \subset X$ نتیجه شود $B \in \xi$ آنگاهξ روی X فیلتر نامیده می شود .

تعریف ۱۱. همگام [۸] :دوپیش فیلتر η و ξ را روی X همگام گوییم اگر برای هر $P \in \xi$ وهر $Q \in \eta$ داشته باشیم : $P \cap Q \neq \emptyset$

تعریف ۱۲. فضای دو دنباله ای[۹] :فضای X را دو دنباله ای گوییم اگر برای هر پیش پالایه η روی X که به یک نقطه $x \in X$جمع شود ، وجود داشته باشد یک پیش پالایه ξ روی X همگرای به همان نقطه به طوریکه ξ و η همگامند .

تعریف ۱۳. فضای بئر :فضای X را بئر خوانیم هرگاه به ازای هرگردایه شمارا از مجموعه های بسته X مانند $\{A_n\}$ که هریک درX دارای درون تهی باشد ، اجتماع آنها یعنی$\bigcup A_n$ نیز در X دارای درون تهی باشد .
یا فضای توپولوژی X را یک فضای بئر نامیم هرگاه هر اشتراک شمارش پذیر از زیر مجموعه های باز و چگال درآن چگال باشد یا به طور معادل هر زیر مجموعه باز ناتهی از آن به صورت اجتماع شمارش پذیر از مجموعه های هیچ جا چگال نباشد .

---

pseudocompact[۲]
regular[۳]
prefilter[۴]
filter[۵]
bisequential[۶]
prefilter[۷]
synchronous[۸]
bisequential[۹]

تعریف ۱۴. درون تهی :منظور از درون تهی Aیعنی اینکه A حاوی هیچ مجموعه بازی از Xغیر از مجموعه تهی نیست.

تعریف ۱۵. خط سورجنفری[۱۰] :فرض کنید $\mathscr{T}$ یک توپولوژی روی $\mathbb{R}$ با پایه$\mathscr{B}$شامل مجموعه های$= [a,b)$ $x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b$باشد به طوریکه $a, b \in \mathbb{R}$و $a < b$.با این توپولوژی این که جمع طبیعی در نقش ضرب باشد،$\mathbb{R}$ یک گروه پاراتوپولوژیک ولذا یک نیم گروه توپولوژیک است.اما$(\mathbb{R}, T)$یک گروه توپولوژیک نیست زیرا عمل $x \longrightarrow -x$ناپیوسته است این گروه پاراتوپولوژیک خط سورجنفری نامیده می شود یا به بیان دیگر یک توپولوژی غیر استاندارد روی خط حقیقی $\mathbb{R}$است وتوپولوژی است که با پایه زیر روی نیم بازه تعریف می شود .

$$B = \{[a,b) |\ a, b \in \mathbb{R}\,, a < b\}$$

تعریف ۱۶. پایه شمارا : گوییم فضای Xدر نقطه xپایه شمارا دارد هرگاه گردایه شمارایی از همسایگی های x مانند B موجود باشد به طوریکه هر همسایگی x دست کم حاوی یک عضو این گردایه باشد . اگرفضایی در هر نقطه اش یک پایه شمارا داشته باشد گوییم در اولین اصل شمارایی صدق می کند .

تعریف ۱۷. فضای لیندولف :فضایی را که هرپوشش باز آن شامل یک زیر پوشش شمارا باشد فضای لیندولوف می نامند.

تعریف ۱۸. هیچ جا چگال ؛ زیر مجموعه Aدر فضای توپولوژی X را هیچ جا چگال گوییم هر گاه درون بستار آن تهی باشد .

تعریف ۱۹. جدایی پذیر: فضای توپولوژیک Xجدایی پذیر نامیده می شود هر گاه حاوی یک زیر مجموعه شمارا و چگال باشد که وجود داشته باشد دنباله ای از اعضای فضا مثل $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ به طوری که هر زیر مجموعه ناتهی از فضا حداقل یک عضو از فضا را داشته باشد (شامل حداقل یک عضو از فضای X باشد)

تعریف ۲۰. فضای منتظم [۱۱] :فرض کنیم مجموعه های تک عضوی درX بسته باشند در این صورت X را منتظم خوانیم اگر به ازای هرنقطه از آن مانند x و هر مجموعه بسته جدا از x مانند B مجموعه های باز جدا از همی به ترتیب شامل x و حاوی B موجود باشند،

تعریف ۲۱. نرمال [۱۲]:فضایX را نرمال گوییم اگر به ازای هر دو مجموعه بسته جدا از هم آن مانندA و B مجموعه های باز جدا از همی ،به ترتیب حاوی A و B موجود باشد.

تعریف ۲۲. مجموعه G_δ: تمام اشتراک های شمارش پذیر از مجموعه های باز.

تعریف ۲۳. فضاهای توپولوژیک : فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. منظور از یک توپولوژی روی X عبارت است از مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های X مانند $\mathscr{T}$ که دارای شرایط زیر باشد:

(۱) $\varnothing, X \in \mathscr{T}$.

---

[۱۰] sorgenfrey
[۱۱] regular
[۱۲] normal

(۲) اجتماع هر تعداد دلخواه از عناصر $\mathscr{T}$ در $\mathscr{T}$ باشد.

(۳) اشتراک تعداد متناهی از عناصر $\mathscr{T}$ در $\mathscr{T}$ باشد.

اعضای $\mathscr{T}$ را باز می‌نامیم. بنابراین شرایط بالا به این گونه قابل بازگویی است که

(۱) $\varnothing$ و X باز هستند.

(۲) اجتماع دلخواه بازها باز است.

(۳) اشتراک متناهی بازها باز است.

تعریف ۲۴. شبکه :یک خانواده N از زیرمجموعه های فضای توپولوژیک X، برای X شبکه است اگر برای هر $x \in X$وهرهمسایگی Uازxوجود داشته باشد $M \in N$به طوریکه $x \in M \subset U$.

تعریف ۲۵. فضاهای متریک : منظور از یک متریک[۱۳] روی یک مجموعه X عبارت است از تابع

$$\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}$$

که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۱) (مثبت معینی) $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$ برای هر $x, y \in X$، و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x = y$.

(۲) (همگنی) $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$ برای هر $x, y \in X$.

(۳) (نامساوی مثلثی) $\mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z) \geq \mathrm{d}(x, z)$ برای هر $x, y, z \in X$.

مجموعه X را به همراه متریک d یک فضای متریک می‌نامیم و با (X, d) نمایش می‌دهیم. اگر $x, y \in X$ آنگاه فاصله بین x و y را $\mathrm{d}(x, y)$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۶. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. زیرمجموعه $\mathscr{B}$ از بازها را یک پایه می نامیم هرگاه هر زیرمجموعه باز از X را بتوان به صورت اجتماعی از عناصر $\mathscr{B}$ نوشت. مجموعه $\mathscr{E}$ از بازها را یک زیرپایه می نامیم هرگاه مجموعه متشکل از تمام اشتراک‌های متناهی از عناصر $\mathscr{E}$ یک پایه باشد.

قضیه ۱.۰.۱. *هر گروه نیمه توپولوژیک هاسدورف موضعا فشرده ، یک گروه توپولوژیک است.(۲-۳-۱۲)[کتاب مربوط به مقاله]۰*

قضیه ۲.۰.۱. *فرض کنیدX یک گروه جبری با توپولوژی هاسدورف موضعل فشرده باشد به طوریکه ضرب در آن پیوسته است .آنگاه X گروه توپولوژی است .[۸] .*

تعریف ۲۷. فضای X ech-complete است اگر X کاملا منتظم بوده و ....

قضیه ۳.۰.۱. *هرگروه نیمه توپولوژیک ech-analytic یک گروه توپولوژیک است.[۴]*

نتیجه ۴.۰.۱. *هرگروه نیمه توپولوژیک ech-complete یک گروه توپولوژیک است .*

قضیه ۵.۰.۱. *اگرGموضعا کامل وتابع xyدرهرمتغیر به صورت جداگانه پیوسته باشد آنگاه در دو متغیر بصورت باهم پیوسته است .*

قضیه ۶.۰.۱. *اگرGکامل وجدایی پذیرواگرxyبه صورت جداگانه درxو yپیوسته باشد آنگاه x^{-1}پیوسته است.*

---

[۱۳] metric

فصل ۲

بخش اول

۱.۲ گروههای پاراتوپولوژیک

لم ۱.۱.۲. *فرض کنید G یک گروه پاراتوپولوژیک باشد و U یک همسایگی از عضو واحد e در G باشد آنگاه :*

$$\forall M \subseteq G : \overline{M} \subset MU^{-1} \tag{۱.۲}$$

برهان. قرار دهید

$$F = G \setminus \bigcup \left\{ gU : g \in G, gU \cap M = \emptyset \right\} \tag{۲.۲}$$

به وضوح F یک مجموعه بسته از G است .و $M \subset F$ بنابراین $\overline{M} \subset F$. عضو دلخواهی مثل $y \in F$ را در نظر می گیریم آنگاه $yU \cap M \neq \phi$ لذا برای یک $h \in U$ و $m \in M$ ؛ $yh = m$
بنا براین $y = mh^{-1} \in MU^{-1}$ لذا $F \subset MU^{-1}$. واز آ نجا که $\overline{M} \subset F$ نتیجه می دهد $\overline{M} \subset MU^{-1}$ □

در فضای توپولوژی نگاشت f درG پیوسته است اگر در نقطه e از G پیوسته باشد .پیوستگی $f : X \longrightarrow Y$ معادل است با :

$$\forall U = nb(f(x_0)) \qquad \exists V = nb(x_0) \qquad f(V) \subseteq U \tag{۳.۲}$$

لم ۲.۱.۲. *فرض کنید G یک گروه پارا توپولوژیک باشد که توپولوژیک نیست آنگاه همسایگی باز U از e وجود دارد که $U \cap U^{-1}$ در G هیچ جا چگال است و لذا درون بستار $U \cap U^{-1}$ تهی است .*

برهان. عمل وارون در G ناپیوسته است بنا براین در e نا پیوسته است و می توانیم همسایگی باز W از

e را چنان انتخاب کنیم که $e \notin int(W^{-1})$زیرا f در x_0 پیوسته نیست معادل است با :

$$\exists U = nb(f(x_0)); \qquad \forall V = nb(x_0) \qquad \exists x \in V : \qquad f(x) \notin U \tag{۴.۲}$$

نگاشت وارون اگر در Gودر نقطه eپیوسته نباشد پس همسایگی $W = Nb(e)$موجود است که هر همسایگی V حول e بگیریم :$I(V) = V^{-1} \nsubseteq W \equiv V \subseteq W^{-1}$
لذا eنمی تواند درونی W^{-1}باشد زیرا اگر $e \in int(W^{-1})$ طبق تعریف نقطه درونی باید $V_1 = nb(e)$که $V_1 \subset W^{-1}$.
اکنون $V_1^{-1} = nb(e)$ و $I(V_1^{-1}) = V_1 \subset W$ وتناقض .از آنجا که ضرب در G پیوسته است می توانیم همسایگی باز U از e را بیابیم که $U^3 \subset W$. که این نتیجه می دهد$U \cap U^{-1}$ در G هیچ جا چگال است . فرض کنیم (خلف) مجموعه باز ناتهی V وجود دارد که $V \subset \overline{U \cap U^{-1}}$ بنا بر لم ۱-۱ ای نتیجه می دهد :

$$V \subset \overline{U \cap U^{-1}} \subset (U \cap U^{-1})U^{-1} \subset U^{-2} \tag{۵.۲}$$

آنگاه : $VU^{-1} \subset U^{-3} \subset W^{-1}$ به وضوح $V \cap U \neq \phi$و مجموعه VU^{-1} در G باز است . بنا براین $e \in VU^{-1} \subset int(W^{-1})$ و تناقض . □

لم ۳.۱.۲. *فرض G یک گروه پارا توپولوژیک با شد که : $e \in \overline{int(\overline{U^{-1}})}$ برای هر همسایگی باز U از e یک گروه توپولوژیک است .*

برهان.

$$if : e \in \overline{int(\overline{U^{-1}})} \Longrightarrow int\overline{U^{-1}} \neq \phi \Longrightarrow \tag{۶.۲}$$

U^{-1} هیچ جا چگال نیست . G پارا توپولوژیک است و توپولوژیک نیست،آنگاه $U \cap U^{-1}$در G هیچ جا چگال است می توان U را متقارن در نظر گرفت که : $U \cap U^{-1} = U$ □

حال آماده ایم مفاهیم زیر را ثابت کنیم که به یک قانون معروف در گروههای توپولوژیک متریک پذیر با متر کامل ، تعمیم یافته است [۱۱] یاد آوری می کنیم که فضای توپولوژیک شبه متریک پذیرگفته می شود اگر توپولوژی آن با یک تقارنی تولید شده باشد و یک تابع فاصله در تمام تحدید های معمولی روی یک متر صدق کند ، به غیر از نامساوی مثلثی .(با یک متر غیر از خواص نامساوی مثلثی را دارد تعریف می شود)[۱]

قضیه ۴.۱.۲. *هر گروه پارا توپولوژیک هاسدورف شبه متریک G با ویژگی بئریک گروه توپولوژیک متریک پذیر است .*

برهان. d شبه متررا روی فضای G ثابت می گیریم که توپولوژی G را تولید می کندفرض U همسایگی از e باشد برای هر عدد صحیح مثبت n و g عضوی از G قرار دهید

$$B_n(g) = \{x \in G : d(g,x) < \frac{1}{n}\} \tag{۷.۲}$$

از آنجا که هر فضای شبه متریک به طور ضعیف شمارای نوع اول است [۱]و بنا بر نتیجه نیکوس [۱۳]

هر گروه پارا توپولوژیک هاسدورف شمارای اول ضعیف ، شمارای نوع اول است . این نتیجه می دهد :

$$\forall n > 0, n \in W, g \in G \Longrightarrow g \in int(B_n(g)) \tag{۸.۲}$$

قرار دهید $A_n = \{g \in G : B_n(g) \subset gU\}$ به وضوح اگر $i < j$آنگاه $A_i \subset A_j$ و : $G = \bigcup\{A_n :$ $n \in W, n > 0\}$ از آنجا که G ویژگی بئر را دارد ، وجود دارد $k \in W$ مثبت و $h \in G$ به طوریکه : مجموعه $V = B_k(h)$ مشمول در $\overline{A_k}$.
لذا $h \in \overline{A_k}$ و چون V همسایگی از از h است داریم $h \in \overline{A_k \cap V}$.
$v \in V \cap A_k$ را انتخاب کنید داریم : $B_k(v) \subseteq vU$ ولی $h \in B_k(v)$ زیرا $v \in B_k(h)$. بنا براین $h \in vU$ برای هر $v \in V \cap A_k$ این نتیجه می دهد :

$$\forall v \in V \cap A_k \longrightarrow h^{-1}v \in U^{-1} \longrightarrow h^{-1}(V \cap A_k) \subset U^{-1} \tag{۹.۲}$$

اما: $V \cap A_k$ در $V_0 = int(V)$ چگال است و ضرب با h^{-1} پیوسته است واین نتیجه می دهد : $h^{-1}(V_0) \subseteq U^{-1}$ از آنجا که $h \in V_0$ و $e \in h^{-1}V_0$ بنابر این از آنجا که $h^{-1}V_0$ یک مجموعه باز است بدست می آید : $e \in int(\overline{U^{-1}})$ حال بنابر لم ۱-۳ ، G یک گروه توپولوژیک است . □

توجه کنید که فرض شبه متریک پذیر [۱] بودن در قضیه ۱-۴ نمی تواند با فرض شمارای نوع بودن G جایگزین شود . این گواهی است برخط سورجنفری[۲] ، که گروه پارا توپولوژیک شمارای نوع اول نامتریک پذیر با ویژگی بئراست.

لم ۵.۱.۲. *فرض کنید Gیک گروه پارا توپولوژیک باشد که توپولوژیک نیست ،آنگاه برای هر زیر مجموعه فشرده F از Gکه $e \notin F$ همسایگی $O(F)$از F وهمسایگی باز $O(e)$از e وجود دارد به طوریکه : $O(F) \cap \big(O(e)\big)^{-1} = \phi$*

برهان. برای هر $x \in F$ همسایگی باز V_x از e را انتخاب می کنیم که $x^{-1} \notin V_x^2$ آنگاه $V_x x \cap V_x^{-1} = \phi$ از آنجا که $\gamma = \{V_x x : x \in F\}$ خانواده ای از مجموعه های باز در G است که پوشش زیر مجموعه فشرده F است ، وجود دارد تعدادی محدود زیر مجموعه K از F به طوریکه $F \subset \bigcup\{V_x x : x \in K\}$ قرار دهید :

$$O(e) = \bigcap\{V_x : x \in K\} O(F) = \bigcup\{V_x x : x \in K\} \tag{۱۰.۲}$$

آنگاه $O(e)$ همسایگی بازی از e و $O(F)$ همسایگی بازی از F است و $O(F) \cap \big(O(e)\big)^{-1} = \phi$ □

قضیه ۶.۱.۲. *فرض f نگاشت هومورفیسم کامل $f : G \longrightarrow H$ که G پارا توپولوژیک و H گروه توپولوژیک است ، باشد آنگاه G هم گروه توپولوژیک است .*

برهان. فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک نباشد آنگاه بنا بر لم ۱-۳ همسایگی باز U از عضو واحد e در G وجود دارد که e در $int(U^{-1})$ نیست . قرار می دهیم $F = f^{-1}f(e)$ و $F_1 = F \setminus U$ از آنجا که F_1 فشرده است و e در F_1 قرار ندارد بنا بر لم (۵-۱)وجود دارد همسایگی باز $O(F_1)$ از F_1 و همشایگی باز $O(e)$ از e به طوریکه : $O(F) \cap \big(O(e)\big)^{-1} = \phi$ از آنجا که $W = O(F_1) \cup U$

[۱] symmetrizabliti
[۲] sorgenfrey

همسایگی بازی از F و f نگاشتی بسته است ، وجود دارد همسایگی باز V از $f(e)$ در H به طوریکه $f^{-1}(V) \subset W$همچنین می توان فرض کرد $V^{-1} = V$ از آنجا که H گروه توپولوژیک است آنگاه :
$f^{-1}(V^{-1}) = f^{-1}(V) \subset W$
سرانجام قرار دهید $W_0 = f^{-1}(V) \cap O(e) \cap U$ به وضوح W_0 همسایگی از e مشمول در U است
همچنین داریم $W_0^{-1} \subset f^{-1}(V)^{-1} \subset W$ و $W_0^{-1} \subset O(e)^{-1}$ از آنجا که
$O(F_1) \cap O(e^{-1}) = \phi$ این نتیجه می دهد $W_0^{-1} \subset U$ بنا براین $e \in W_0 \subset int(U^{-1})$
وتناقض البته اینکه هر گروه پارا توپولوژیک هاسدورف فشرده یک گروه پارا توپولوژیک است نتیجه مستقیم قضیه ۶-۱ است . □

قضیه ۷.۱.۲. *فرض کنیدG یک گروه پارا توپولوژیک باشد که G یک G_δ- زیر مجموعه چگال از یک فضای فشرده نمای منتظم X باشد ، آنگاه G یک گروه توپولوژیک است .*

برهان. فرض کنیم (خلف) G گروه توپولوژیک نباشد ، آنگاه بنا بر لم (۲-۱) وجود دارد همسایگی باز U از e در G به طوریکه $U \cap U^{-1}$ هیچ جا چگال است .فرض کنیم W همسایگی باز e در G باشد به طوریکه $\overline{WW} \subset U$ قرار دهید $O = W \setminus \overline{U \cap U^{-1}}$ آ نگاه به وضوح $O \subset W \subset \overline{O}$ و
$O^{-1} \cap U = \phi$
دنباله $\{M_n : n \in \omega\}$ از مجموعه های بازX را ثابت بگیرید به طوریکه $G = \bigcap\{M_n : n \in \omega\}$
دنباله $\{U_n : n \in \omega\}$ از مجموعه های باز X ودنباله $\{x_n : n \in \omega\}$ از اعضای G را تعریف می کنیم به طوریکه $x_n \in U_n$
قرار دهید $U_0 = M_0$ و x_0 نقطه ای دلخواه از O . حال فرض کنید برای یک $n \in \omega$یک زیر مجموعه باز U_nاز X و $x_n \in G \cap U_n$ باشد . از آنجا که $e \in W \subset \overline{O}$ داریم $x_n \in x_n\overline{O} = \overline{x_nO}$ از آنجا که U_n همسایگی بازی از x_n هست این نتیجه می دهد : $U_n \cap x_nO \neq \phi$
x_{n+1} را نقطه ای از $U_n \cap x_nO$ می گیریم . توجه کنید که $x_{n+1} \in G$ زیرا $x_nO \subset G$.
از منتظم بودن X می توانیم یک همسایگی U_{n+1}از x_{n+1} در X بیابیم به طوریکه $\overline{U_{n+1}}$ مشمول در $U_n \cap M_n$ باشد و $U_{n+1} \cap G \subseteq x_nO$.
تعریف مجموعه های U_nوx_nبرای هر $n \in \omega$ کامل شد .
توجه کنید برای $j < i$ ، $\overline{U_i} < U_j$ و همچنین داریم $x_{n+1} \in x_nO$ برای هر $n \in \omega$.
قرار دهید $F = \bigcap_{n\in\omega} U_n$به وضوح $F \subset G$ و $\phi \neq \bigcap_{n\in\omega} \overline{U_n} = F$ مجموعه FW همسایگی بازی از F در G است . بستار P از FW در X و H را بستار $X \setminus P$ در X را در نظر بگیرید.نشان دادن $H \cap F = \phi$ آسان است .
فرض $x \in F \cap H$ از آنجا که FW همسایگی بازی از Fدر G است ، $x \in F$ نتیجه می دهد : وجود دارد همسایگی باز $O(x)$ از x در X به طوریکه $O(x) \cap G \subset FW$
آنگاه از آنجا که Gدر X چگال است ، داریم : $O(x) \subset P$.
از طرفی $x \in H$نتیجه می دهد : $O(x) \cap (X \setminus P) \neq \phi$ ویک تنلقض .
بنا براین $H \cap F = \phi$
حال از فشرده نما بودن pseudocompact بودن X وتعریف F داریم : $U_k \cap H = \phi$ (زیرا اگر $j < i$ ؛ $\overline{U_i \subset U_j}$). آنگاه $U_k \subset P$ از آنجا که $x_k \in U_k \cap G$ این نتیجه می دهد $x_k \in \overline{FW}$ در هر صورت :

$$F \subset U_{k+2} \cap G \subset x_{k+1}O \subset x_{k+1}W \qquad (۱۱.۲)$$

بنا براین $x_k \in \overline{FW} \subset x_{k+1}\overline{WW}$ و از آنجا که $x_{k+1} \in x_kO$ داریم : $x_k \in x_kO\overline{WW}$.
از این رو $e \in O\overline{WW} \subset OU$ بنا براین $O \cap U^{-1} \neq \phi$ زیرا $O \subset U$نتیجه می دهد :
$O \cap (U \cap U^{-1}) = O \cap U^{-1} \neq \phi$ وتناقض . □

گروه توپولوژیکی G را $\aleph_0$-کراندار (کلاکراندار) گوییم اگر برای هرهمسایگی بازUاز e در Gیک مجموعه شمارا (کراندار) $A \subset G$ وجود داشته باشد به طوریکه : $AU = UA = G$

قضیه ۸.۱.۲. *فرض کنید G گروه توپولوژیک وH یک گروه پارا توپولوژیک باشد و $\varphi : G \longrightarrow H$نگاشت همریختی پوشا و پیوسته باشد ، همچنین فرض کنید یکی از شرایط زیر برقرار باشد :*
۱) G کلا کراندار است. ۲)G بئر بوده و $\aleph_0$ کراندار است .
آنگاه H یک گروه توپولوژیک است .

برهان. فرض کنید H گروه توپولوژیک نباشد بنا برلم ۲-۱ همسایگی باز Uاز e در H وجود دارد به طوریکه $U\cap U^{-1}$ هیچ جا چگال است W را همسایگی از عضو یکانی G بگیرید به طوریکه $\varphi(W) \subset U$ و $W = W^{-1}$
حالت اول : فرض Gگروه کلا کراندار باشد ، وجود دارد یک $A \subset G$ محدود به طوریکه $G = AW$آنگاه $M = \varphi(W) \subset U \cap U^{-1}$ هیچ جا چگال است و $\varphi(A)M = H$ بنا بر این H اجتماعی از خانواده ای محدود از مجموعه های هیچ جا چگال است و تناقض.

حالت دوم : از آنجا که G یک گروه $\aleph_0$-کراندار است ، وجود دارد مجموعه ی شمارای $A \subset G$ به طوریکه $G = AW$ آنگاه $M = \varphi(W) \subset U \cap U^{-1}$ هیچ جا چگال و $\varphi(A)M = H$ بنابراین H اجتماعی از خانواده شمارا از مجموعه های هیچ جا چگال است و تناقض . □

فصل ۳

بخش دوم

۱.۳ گروههای نیمه توپولوژیک

دراین بخش ارتباط جدیدمسلم ویژگی های کاردینال در گروههای پارا توپولوژیک ثابت می کنیم .این ثابت می کند که اگر G یک گروه پارا توپولوژیک دنباله ای [1] با شد به طوریکه G لیندولف باشد آنگاه G یک شبکه شمارا دارد .

تعریف ۲۸.

تحت (ch) ، ثابت می کنیم که اگر G یک گروه پارا توپولوژیک شمارای نوع اول جدایی پذیرباشد به طوریکه G نرمال باشد آنگاه G یک پایه شمارا دارد . این یک امیدی می دهد که چرا خط سورجنفری نرمال نیست .مشاهده می شود که یک گروه پارا توپولوژیک تیخونوف غیر نرمال شمارای نوع اول وجود دارد.(کافی است مربع خط سورجنفری را در نظر بگیریم).
اما نشان می دهیم که شمارای نوع اول بودن تاثیر زیادی روی ویژگی گروههای نیمه توپولوژیک دارد .نکات زیر ابزارهای لازم برای این کار است .

تعریف ۲۹. فرض کنید G یک گروه (فقط یک گروه جبری) باشد خانوادهξاز زیر گروههای G ظریف[2]یا ظریفگر هاسدورف [3]روی X نامیده می شود اگر همه اعضای ξ ناتهی بوده وبرای هر $z \in G$ متمایز از eوجود داشته باشد $P \in \xi$ به طوریکه : $zP \cap P = \emptyset$

اگر G یک گروه نیمه توپولوژیک هاسدورف باشد و$\mathcal{B}$ پایه ای از G در یک $a \in G$، آنگاه$\mathcal{B}$روی Gیک هاسدورف دیسکرونر است .
به عنوان مثال کمی با اهمیت کمترو لی بسیار مفید ازظریفگر هاسدورف ، وقتی یک π -شبکه دلخواه را در نظر بگیریم .
یادآوری : خانواده ξاز زیر مجموعه هایی از فضای توپولوژیکی X ،π -شبکه از X در یک نقطه

[1] bisequential
[2] discerning
[3] discernor hausddorff a

$a \in X$است اگر تمام اعضای ξناتهی بوده و هر همسایگی باز از aدر X یک عضواز ξ را شامل باشد .
اگر ξیک π-شبکه از X در $a \in X$ باشد وتمام اعضای ξ باز باشد گوییم ω یک π-پایه از Xدرaاست .

گزاره ۱.۱.۳. *فرض کنید G یک گروه نیمه توپولوژیک هاسدورف باشد آنگاه هر π-شبکه ξازGدرeروی Gظریفگرهاسدورف است .*

گزاره ۲.۱.۳. *فرض کنید G یک گروه وξ ، ظریفگرهاسدورف روی G باشد آنگاه :*

$$\bigcap\{PP^{-1} : P \in \xi\} = \{e\} \tag{۱.۳}$$

برهان. قرار دهید $F = \bigcap\{PP^{-1} : P \in \xi\}$ به وضوح $e \in F$. حال یک $z \in F$ انتخاب کنید باید نشان دهیم $z = e$.
فرض کنیم که برقرار نباشد آنگاه می توانیم $P \in \xi$ را ثابت بگیریم که $zP \cap P = \emptyset$حال داریم $z \notin PP^{-1}$: واضح است از طرفی $z = ab^{-1}$برای تعدادی a, b در P و $zb = a \in zP \cap P$ وتناقض . این نتیجه می دهد $z \neq F$و تناقض بنا براین $F = \{e\}$ و $\bigcap\{PP^{-1} : P \in \xi\} = \{e\}$. □

فرض کنید G یک گروه نیمه توپولوژیک باشد ظریفگر توپولوژیک ، ξ روی G یک ظریفگرهاسدورف روی Gاست به طوریکه درون PP^{-1}برای هر $P \in \xi$ شامل e است .
یک ظریفگر باز نامیده می شود اگر تمام اعضای آن مجموعه های باز باشد ....
....
....