# بسمه تعالی

# تحلیلِ ابعادی

دانشگاهِ الزهرا— ۱۳۸۲
امیرِ آقامحمدی

ما در فیزیک وقتی صحبت از یک کمیتِ مشاهده‌پذیر می‌کنیم منظورِمان آن است که آن کمیت قابلِ سنجشِ است. در روابطِ فیزیکی با کمیت‌هایِ سنجش‌پذیر و یا مشاهده‌پذیر سرو کار داریم. به هر کمیتِ مشاهده‌پذیری علاوه بر مقدارِ عددی، بُعد هم نسبت می‌دهیم. مثلاً بُعد مکان $x$ را که با $[x]$ نشان می‌دهیم، $L$، بُعدِ زمان $[t]=T$، و بُعدِ سرعت $[v]=LT^{-1}$ است. مقدارِ عددیِ هر کمیتِ بُعدداری به دستگاهِ آحادی که انتخاب می‌کنیم بستگیِ دارد. هر رابطه‌یِ فیزیکی به صورتِ یک تساوی است که دو طرفِ رابطه هم‌بُعد اَند. مثلاً در رابطه‌یِ

$$x = vt \qquad (۱)$$

هر دو طرف بُعدِ طول دارند. برایِ جسمی که با سرعتِ ثابت حرکت می‌کند، این رابطه در هر دستگاهِ آحادی درست است. با تغییرِ دستگاهِ آحاد مقدارِ عددیِ هر دو طرف عوض می‌شود ولی تساویِ دو طرف کماکان برقرار است. البته این رابطه را به صورتِ $x/(vt)=1$ هم می توان نوشت که دو طرفِ رابطه بدونِ بُعدند. سمت راستِ معادله‌یِ آخر در هر دستگاهِ آحادی 1 است. اگر دو طرفِ یک تساوی کمیتِ‌هایی با ابعاد مختلف باشند نتیجه تنها در یک دستگاهِ آحاد می‌تواند درست باشد. مثلاً فرض کنید در تساویِ $A=B$، $A$ و $B$ هر دو 10 هستند. ولی $A=10\,m$ و $B=10\,m^2$ است. اگر کمیت‌هایِ $A$ و $B$ را بر حسبِ $cm$ و $cm^2$ بنویسیم $A=1000\,cm$ و $B=100000\,cm^2$ می‌شود که با هم مساوی نیستند. اما اگر بخواهیم رابطه‌ای فیزیکی در هر دستگاهِ آحادی درست باشد، باید دو طرفِ تساوی در آن رابطه هم‌بُعد و یا بدونِ بِعد باشند.

بزرگی و یا کوچکی یک کمیتِ بُعددار هم بی‌معناست. مثلاً فاصله‌یِ $d_1=1\,m$ نسبت به ابعاد هسته‌ای یعنی اعدادی از رتبه‌یِ $d_2=10^{-15}\,m$ بسیار بزرگ و نسبت به یک سالِ نوری یعنی چیزی حدودِ $d_3=10^{16}\,m$ بسیار کوچک است. از تقسیم دو کمیتِ هم‌بُعد کمیتی بدونِ بُعد $\Pi$ به دست می‌آید. حالا می‌توان از بزرگی و یا کوچکی این کمیت حرف زد. مثلاً $\Pi_1:=d_1/d_2=10^{15}\gg 1$ و $\Pi_2:=d_1/d_3=10^{-16}\ll 1$. روابطِ اَخیر به دستگاهِ آحاد هم بستگی ندارد و مقدارِ $d_1$، $d_2$ و $d_3$ را مثلاً اگر بر حسبِ $mm$ هم قرار دهیم همان مقادیرِ عددیِ قبلی برایِ $\Pi_1$ و $\Pi_2$ به دست می‌آید.

در هر محاسبه‌ای ما با کمیت‌هایی با ابعادِ گوناکون سروکار داریم. در ابتدا لازم است که

ببینیم چه کارهایی با کمیت‌هایِ بُعد دار می‌توان انجام داد. مثلاً دو کمیتِ هم‌بُعد را می‌توان جمع کرد اما جمعِ کمیتی با بُعد طول با کمیتی با بُعدِ مساحت بی‌معناست. مقایسه‌یِ بزرگ‌تری، کوچک‌تری نیز برایِ دو کمیتِ با بُعدِ مختلف بی‌معناست. اما دو کمیتِ هم‌بُعد را می‌توان با هم جمع و یا از هم کم کرد و کمیتی هم که به دست می آید همان بُعد را دارد.

به طورِ خلاصه:

۱) تنها کمیت‌هایِ هم‌بُعد را می‌توان با هم جمع و یا از هم کم کرد.

۲) کمیت‌هایِ مختلف را می‌توان در هم ضرب و یا تقسیم کرد. لزومی ندارد که این کمیت‌ها بُعدِشان یکی باشد. بُعدِ کمیتِ نهایی نیز از ضرب و تقسیمِ اَبعادِ همان کمیت‌ها به دست می آید.

تابعیِ مثلِ

$$f(x) = a\ x^2 + b\ x^3, \qquad (۲)$$

تنها در صورتی از لحاظِ اَبعادی سازگار است که بُعدِ $ax^2$ و $bx^3$ یکی باشد. بنا بر این در یک چندجمله‌ای تمامِ جملات می‌توانند بُعددار باشند ولی تنها وقتی از لحاظِ اَبعادی سازگار است که تمامِ جملاتِ آن هم‌بُعد باشند . تابعی مثلِ

$$f(x) = \sin\ ax, \qquad (۳)$$

تنها در صورتی از لحاظِ اَبعادی سازگار است که $ax$ بدونِ بُعد باشد. زیرا در بسطِ $\sin\ ax$ جملاتِ $ax$ و $a^3x^3$ ظاهر می شوند. در واقع برایِ چنین توابعی آرگومانِ تابع باید بدونِ بُعد باشد.

فرض کنید $Q_1$ و $Q_2$ دو کمیتِ بُعددار باشند و رابطه‌یِ

$$Q_1 = f(Q_2), \qquad (۴)$$

بینِ آن‌ها برقرار باشد. بُعدِ $Q_1$ و $f(Q_2)$ باید یکی باشد. اگر بستگیِ $[Q_1]$ به بُعدِ $L$ مثلِ $L^\alpha$ باشد، $[Q_2]$ هم باید به $L$ بستگی داشته باشد، مثلاً $L^\beta$. با عوض کردنِ دستگاهِ آحاد مقدارِ عدديِ $Q_1$ و $Q_2$ عوض می‌شوند. فرض کنید، با تغییرِ واحد مثلاً مقدارِ عدديِ طول به اندازه‌یِ $b$ عوض می‌شود ( برایِ تبدیل از $m$ به $cm$، $b = 100$ است.) در این صورت رابطه‌یِ (۴) به صورت زیر در می آید.

$$Q_1\ b^\alpha = f(Q_2\ b^\beta). \qquad (۵)$$

می‌خواهیم ببینیم رابطه‌ی فوق چه شرطی رویِ $f(Q_2)$ می‌گذارد.

$$f(Q_2) = f(\frac{Q_2}{c}\,c) = f\left([(\frac{Q_2}{c})^{1/\beta}]^{\beta}\,c\right) = (\frac{Q_2}{c})^{\alpha/\beta} f(c) \qquad (۶)$$

پس

$$Q_1 = f(Q_2) = Q_2^{\beta/\alpha} g(c). \qquad (۷)$$

در ضمن کمیتِ $Q_1/Q_2^{\beta/\alpha}$ نیز بدونِ بُعد است. در این صورت

$$\Pi := \frac{Q_1}{Q_2^{\beta/\alpha}} = C \qquad (۸)$$

که $C$ یک ثابت است. بنا بر این دو کمیتِ بُعددار تنها وقتی می توانند به هم مربوط باشند که یکی تابعی توانی از دیگری باشد.
فرض کنید در مسئله‌ای $N$ کمیتِ بُعددار دخیل اَند. ابتدا باید کمیت‌هایِ بدونِ بُعدی مثلِ $\Pi_i,\ i = 1, \cdots M$ که از این مجموعه می‌توان ساخت را به دست آورد. واضح است که $M < N$ است. در صورتی که در پدیده‌یِ موردِ نظرِ ما سه کمیتِ $Q_1$، $Q_2$ و $Q_3$ دخیل باشند.

$$Q_1 = f(Q_2, Q_3). \qquad (۹)$$

اگر از این سه کمیت تنها یک کمیتِ بدونِ بُعد مثلِ $\Pi$ بتوان ساخت، معادله‌یِ بالا به صورتِ

$$F(\Pi) = 0, \qquad (۱۰)$$

یا

$$\Pi = C, \qquad (۱۱)$$

در می آید. اگر از این سه کمیت بتوان دو کمیتِ بدونِ بُعد مثلِ $\Pi_1$ و $\Pi_2$ ساخت، معادله‌یِ (۹) به صورتِ

$$G(\Pi_1, \Pi_2) = 0, \qquad (۱۲)$$

در می‌آید.

فرض کنید در مسئله‌ای $N$ کمیتِ بُعددار دخیل اَند و کمیت‌هایِ $\Pi_i,\ i=1,\cdots M$ بدونِ بُعدند. رابطه‌یِ فیزیکی رابطه‌ای بین این $M$ کمیتِ بدونِ بُعد است.

$$G(\Pi_1,\cdots,\Pi_M)=0. \tag{۱۳}$$

یا

$$\Pi_1=G(\Pi_2,\cdots,\Pi_M). \tag{۱۴}$$

بنا بر این

۱) ابتدا لازم است که کمیت‌هایِ فیزیکیِ دخیل در مسئله را بشناسیم.

۲) کمیت‌هایِ بدونِ بُعدِ مسئله را بسازیم.

بندِ اول معمولاً سخت‌ترین بخشِ مسئله است. اگر تنها یک کمیت را در نظر نگیریم جواب ما می‌تواند کاملاً غلط باشد. در صورتی که تمامِ کمیت‌هایِ بُعددارِ مسئله مثلاً $Q_i,\ i=1,\cdots N$ را بشناسیم، ساختنِ کمیت‌هایِ بدونِ بُعدِ مسئله $\Pi_i,\ i=1,\cdots M$ کاری ساده است. ابتدا ترکیبی مثلِ

$$\Pi_1=Q_1^{\alpha_1}\cdots Q_N^{\alpha_N} \tag{۱۵}$$

را می‌سازیم. به جایِ $Q_i$ها ابعادِ آن‌ها را قرار می‌دهیم. مجموعه‌یِ $\alpha_i$ها را باید به گونه‌ای باشند که $\Pi_1$ بدونِ بُعد باشد. به همین صورت ادامه می‌دهیم و بقیه‌یِ $\Pi_i$ها را می‌سازیم. اگر اَبعادی که در همه‌یِ $Q_i$ها ظاهر می‌شوند $m$ تا باشد $m$ معادله از شرطِ بدونِ بُعد بودنِ $\Pi_i$ها به دست می‌آید و در واقع تعدادِ کمیت‌هایِ بدونِ بُعدِ مستقلِ مسئله $M=N-m$ تاست. اگر تنها یک کمیتِ بدونِ بُعد داشته باشیم در جوابِ نهایی یک ثابتِ بدونِ بُعد می‌ماند که روشِ تحلیلِ اَبعادی چیزی راجع به آن نمی‌تواند بگوید. اگر کمیت‌هایِ بدونِ بُعد بیش از یک باشد در جوابِ نهایی توابعی از کمیت‌هایِ بدونِ بُعد باقی می‌مانند که روشِ تحلیلِ اَبعادی چیزی راجع به آن‌ها نمی‌تواند بگوید.

**مثال ۱** — می‌خواهیم پریودِ نوسانِ یک آونگ را به دست آوریم. کمیت‌هایِ دخیل در مسئله احتمالاً پریودِ آونگ $\tau$، جرمِ آونگ $m$، طولِ آونگ $l$، ثابتِ گرانش $g$ و دامنه‌یِ

اولیه‌یِ آونگ $\theta_0$ است. $\pi_1 = \theta_0$ که بدونِ بُعد است. پس کافی است که با$\tau$، $m$، $l$،و $g$ کمیتِ بدونِ بُعد بسازیم.

$$\Pi_2 = m^\alpha g^\beta l^\gamma \tau^\delta. \tag{۱۶}$$

بنا بر این

$$[\Pi_2] = M^\alpha (LT^{-2})^\beta L^\gamma T^\delta \tag{۱۷}$$

باید بدونِ بُعد باشد. پس

$$\alpha = 0, \quad \gamma = -\beta, \quad \delta = 2\beta \tag{۱۸}$$

یعنی کمیتِ $(\frac{g\tau^2}{l})^\beta$ یا $\frac{g\tau^2}{l}$ بدونِ بُعد است. در این مثال دو کمیت‌هایِ بدونِ بُعدِ مستقلِ $\theta_0$ و $\frac{g\tau^2}{l}$ را داریم. پس

$$\frac{g\tau^2}{l} = f(\theta_0) \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{lf(\theta_0)}{g}}. \tag{۱۹}$$

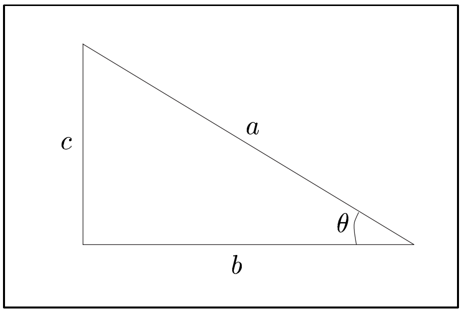
می‌دانیم در حالتِ خاص کم‌دامنه که دامنه‌یِ اولیه دخالتی در پریود ندارد جواب

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{۲۰}$$

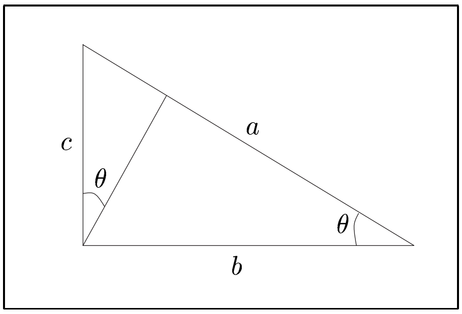
است.

**مثال ۲**— میخواهیم قضیه‌یِ فیثاغورث را با استفاده از تحلیلِ اَبعادی اثبات کنیم. میدانیم مساحتِ یک مثلثِ قائم‌الزاویه $S$ با طولِ وتر $a$ و یک زاویه‌ی حاده‌یِ آن $\theta$ به طورِ یک‌تا مشخص می‌شود. در این مثال دو کمیتِ بدونِ بُعد داریم، $\theta$ و $S/a^2$ که طبق رابطه‌یِ زیر به هم مربوط‌اَند.

$$S/a^2 = f(\theta) \quad \Rightarrow \quad S = a^2 f(\theta) \tag{۲۱}$$




حالا اگر ارتفاعِ مثلث را بکشیم، دو مثلثِ قائم‌الزاویه با وترهایِ $b$ و $c$ و همان زاویه‌یِ $\theta$ داریم. مساحتِ این مثلث‌ها را $S_2$ و $S_3$ بگیرید.




در این صورت $S_2 = b^2 f(\theta)$ و $S_3 = c^2 f(\theta)$. حال اگر اضافه بر تحلیلِ اَبعادی از جمع‌پذیریِ مساحت‌ها هم استفاده کنیم به رابطه‌یِ زیر می‌رسیم.

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad (۲۲)$$

**مثال ۳**— جسمی در حضورِ مقاومتِ هوا سقوط می‌کند. اندازه‌یِ نیرویِ مقاومتِ هوا را $f = bv^2$ بگیرید. می‌خواهیم سرعتِ حدِّ جسم را به دست آوریم. کمیت‌هایِ دخیل در مسئله را $b$، $m$، $g$، و $v$ بگیرید. با کمی محاسبه می‌توان نان داد تنها کمیتِ بدونِ بُعدِ مسئله $\Pi = bv^2/mg$ است. پس

$$bv^2/mg = C \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{Cmg}{b}} \qquad (۲۳)$$

اگر مسئله را با روشِ نیوتنی حل کنیم ضریبِ $C = 1$ به دست می آید.

**مثال ۴**— قطره‌یِ مایعی را در نظر بگیرید، که به شکلِ کره‌ای به شعاعِ $R$ است. چگالیِ مایع $\rho$ (با بُعدِ $ML^{-3}$) و کششِ سطحیِ آن $\sigma$ (با بُعدِ $MT^{-2}$) است. اگر این قطره را به

ارتعاش در آوریم شکلِ آن دیگری کروی نمی‌ماند، ولی حولِ شکلِ کره نوسان می‌کند. دوره‌ی تناوبِ این نوسانات $\tau$، به $R$، $\rho$ و $\sigma$ بستگی دارد. با استفاده از تحلیلِ ابعادی رابطه‌ای بینِ این کمیت‌ها به دست آورید.

**حل:**

فرض می کنیم کمیتِ بدونِ بُعد

$$\Pi := \tau^\alpha R^\beta \rho^\gamma \sigma^\delta \qquad (۲۴)$$

باشد. در این صورت

$$[\Pi] = T^\alpha L^\beta (ML^{-3})^\gamma (MT^{-2})^\delta \qquad (۲۵)$$

باید بدونِ بُعد باشد، یعنی

$$\alpha - 2\delta = 0 \qquad \beta - 3\gamma = 0 \qquad \gamma + \delta = 0. \qquad (۲۶)$$

در این صورت کمیتِ $[R^3\rho/(\tau^2\sigma)]^\gamma$ بدونِ بُعد است. بنا بر این

$$\tau = C\sqrt{\frac{R^3\rho}{\sigma}} \qquad (۲۷)$$

که $C$ یک ثابت است.

**مثال ۵**– وقتی دو لایه‌ی شاره رویِ هم می‌لغزند و سرعتِ‌شان با هم فرق دارد، نیرویی بینِ دو لایه وارد می‌شود. این نیرو برابر است با مساحتِ لایه‌ها ضرب‌در اختلافِ سرعتِ لایه‌ها، تقسیم بر فاصله‌ی لایه‌ها ضرب در یک ضریب به اسمِ ضریبِ گران‌روی $\mu$. در ابتدا بُعدِ گرانروی $[\mu]$ را به دست می‌آوریم.

$$MLT^{-2} = [\mu] \times L^2 \times LT^{-1}/L \quad \Rightarrow \quad [\mu] = ML^{-1}T^{-1}. \qquad (۲۸)$$

شاره‌ای با چگالیِ $\rho$ و گران‌رویِ $\mu$ با سرعتِ $v$ را در نظر بگیرید که در لوله‌ای به قطرِ $D$ در حرکت است. اُفتِ فشارِ شاره در واحدِ طولِ آن را $\Delta P$ بگیرید.

$$\Pi = \rho^a \mu^b v^c D^d (\Delta P)^e. \qquad (۲۹)$$

در این صورت

$$[\Pi] = (ML^{-3})^a (ML^{-1}T^{-1})^b (LT^{-1})^c L^d (ML^{-2}T^{-2})^e. \qquad (۳۰)$$

با صفر قرار دادنِ توان‌هایِ $M$، $L$، و $T$ به روابطِ زیر می‌رسیم.

$$a+b+e=0, \quad -3a-b+c+d-2e=0, \quad -b-c-2e=0 \qquad (۳۱)$$

3 معادله برایِ 5 مجهول است. بنا بر این 2 پارامتر آزاد می‌ماند و 2 کمیتِ بدونِ بُعدِ مستقل داریم. با انتخاب‌هایِ مختلف برایِ این 2 پارامتر شکل‌هایِ مختلفی برایِ این کمیت‌هایِ بدونِ بُعد به دست می‌آید، ولی 2 تا را می‌توان انتخاب کرد و کمیت‌هایِ بدونِ بُعد را به دست آورد. انتخاب‌هایِ دیگر کمیت‌هایِ بدونِ بُعدِ دیگری می‌دهند. اما این‌ها جدید نیستند و از ترکیب همان دو تا به دست می‌آیند. با انتخابِ $b$ و $e$، $\Pi_1=(D\Delta P)/(\rho v^2)$، و $\Pi_2=\mu/(\rho v D)$ به دست می‌آیند. پس رابطه‌یِ فیزیکی باید

$$\frac{D\Delta P}{\rho v^2}=f(\frac{\mu}{\rho v D}), \qquad (۳۲)$$

باشد.

تا این‌جا با استفاده از تحلیلِ اَبعادی تا جایی‌که امکان داشت معادلاتِ حاکم بر پدیده‌هایِ فیزیکی را به دست آوردیم. حالا فرض کنید کسی می‌خواهد یک پدیده را در آزمایش‌گاه بررسی کند. فرض کنید کمیت‌هایِ دخیلِ در پدیده $Q_1,\cdots,Q_N$ باشد. یک راه که معمولاً گفته می‌شود آن است که $N-2$ کمیت را ثابت نگه داریم و تغییراتِ یکی بر حسبِ دیگری بررسی کنیم. در این صورت باید تمام زوج‌هایِ دوتایی را از بینِ $N$ تا جدا و آزمایش کنیم یعنی $N(N-1)/2$ بار باید این کار را انجام دهیم. اما با استفاده از تحلیلِ اَبعادی کافی است ابتدا $M$ کمیتِ بدونِ بُعد مسئله که از $N$ کم‌تر است را به دست آوریم و $M(M-1)/2$ بار بررسی را انجام دهیم. مثلاً در مثالِ بالا کافی است به جای 10 مورد بررسی و رسم منحنیِ تغییراتِ زوج‌هایِ متغیر فقط 1 مورد بررسی صورت گیرد.

آخرین موردی که به آن می‌پردازیم، مدل‌سازی و یا تشابه است. حتماً صحنه‌هایی از فیلم‌هایی را به یاد دارید که مثلاً شعله‌یِ آتشی و یا موج و توفانی و یا غرق شدنِ یک کشتی را نشان می‌داد ولی کاملاً تصنعی به نظر می‌رسید. یا بر عکس فیلم‌هایی را دیده‌ایم که چنین صحنه‌هایی خیلی واقعی هستند. چرا اولی تصنعی و دومی واقعی بود؟ گاهی اوقات وقتی قرار است پولِ هنگفتی صرف ساختنِ وسیله‌ای شود، ابتدا مدلی کوچک‌تر ساخته می‌شود و آزمایش‌هایی رویِ این مدلِ کوچک صورت می‌گیرد. با این آزمایش‌ها اطلاعاتی در موردِ سیستمِ بزرگ به دست می‌آید. فرض کنید در سیستمِ اصلی کمیت‌هایِ بدونِ بُعد $\Pi_1,\cdots,\Pi_N$ باشند. اگر چه ممکن است ما دقیقاً نتوانیم مسئله‌یِ اصلی را مستقیماً تحلیل کنیم، ولی از بحث‌هایِ قبلی واضح است که

$$\Pi_1 = F(\Pi_2, \cdots, \Pi_N). \qquad (۳۳)$$

سیستمی شبیهِ سیستم اصلی ولی در ابعادی کوچکتر می‌سازیم. فیزیکِ حاکم بر هر دو سیستم یکی است، بنا بر این هر چند تابعِ $F$ را نمی‌شناسیم براي سیستمِ مدل هم داریم

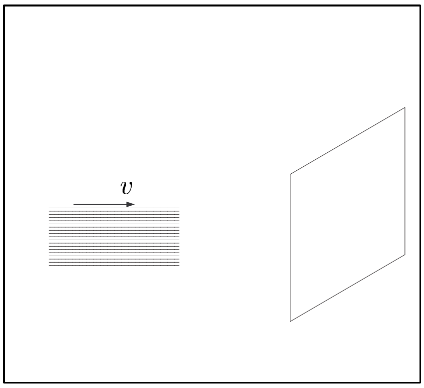
$$\Pi_{1m} = F(\Pi_{2m}, \cdots, \Pi_{Nm}). \qquad (۳۴)$$

که $\Pi_{im}$ ، $i$ اُمین کمیتِ بدونِ بُعدِ مدل است. چون ما رويِ سیستمِ مدل کنترلِ بیش‌تری داریم مدل را جوری می‌سازیم که

$$\Pi_{2m} = \Pi_2, \cdots, \Pi_{Nm} = \Pi_N. \qquad (۳۵)$$

پس سمتِ راستِ روابطِ (۲۹) و (۳۰) یکی می‌شوند و در نتیجه سمتِ چپِ آن‌ها هم باید یکی باشند. با اندازه‌گیريِ $\Pi_{1m}$ در واقع مثلِ آن است که $\Pi_1$ را اندازه گرفته باشیم.

**مثال ۶**— صفحه‌يِ مستطیلی‌شکلی با ابعادِ $l$ و $l'$ را درونِ شاره‌ای گذاشته‌ایم. سرعتِ شاره در فاصله‌ی دور $v$ در جهتِ عمود بر صفحه است. چگالیِ شاره $\rho$ و گران‌رويِ آن $\mu$ است. نیرویی که از طرفِ شاره بر مستطیل وارد می‌شود به پارامترهايِ $v, l, l', \rho, \mu$ بستگی دارد.




برايِ به دست آوردنِ این نیرو مستطیلِ مدلی با ابعادِ $l_0$ و $l'_0$ را درونِ شاره‌ای با همان سرعت قرار می‌دهیم. ابعادِ مدل 100 برابر کوچک‌تر از مستطیلِ اصلی است. چگالیِ شاره $\rho_0 = 10\rho$، و گران‌رويِ آن $\mu_0 = 0.1\mu$ است. نیرويِ وارد بر مستطیلِ مدل $F_0$ شده است. نیرويِ وارد بر مستطیلِ بزرگ چه‌قدر است؟

براي به دست آوردنِ نیروي وارد بر مستطیل لازم است کمیت‌هاي فیزیکيِ دخیل در مسأله را در نظر بگیریم. آن‌ها عبارت‌اَند از $F, l, l', v, \rho, \mu$. اما واضح است اگر مستطیل را به اندازه‌ي 90 درجه حولِ محورِ عمود بر مرکزش دوران دهیم، یعنی تحتِ تبدیلِ $l \leftrightarrow l'$ نیرو عوض نمی‌شود. بنا بر این $l$ و $l'$ تنها به صورتِ ترکیبِ $A = ll'$ در نیرو ظاهر می‌شوند. حال از این کمیت‌ها کمیتی بدونِ بُعد مثلِ $\Pi$ می‌سازیم.

$$\Pi := F^a (ll')^b v^c \rho^d \mu^e$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که کمیتِ زیر باید بدونِ بُعد باشد.

$$M^{a+d+e} L^{a+2b+c-3d-e} T^{-2a-c-e}$$

که این به معنای صفر بودنِ نماهاست. که از این جا

$$d = -a - e, \quad c = -2a - e, \quad b = -\frac{1}{2}(2a + e)$$

دو پارامترِ مستقل داریم که ما در این‌جا $a$ و $e$ را به عنوانِ پارامترهاي مستقل گرفته‌ایم. در این صورت دو کمیتِ بدونِ بُعدِ $\Pi_1 := F/(\rho v^2 ll')$ و $\Pi_2 := \mu/(\rho v\sqrt{ll'})$ را به دست می آوریم. با انتخاب پارامترهاي دیگری به عنوانِ پارامترِ مستقل دو کمیتِ بدونِ بُعدِ دیگر را به دست خواهیم آورد که توابعی از $\Pi_1$ و $\Pi_2$ خواهند بود. رابطه‌ي فیزیکيِ نهایی باید رابطه‌ای بینِ کمیت‌هاي بدونِ بُعد باشد، پس

$$\frac{F}{\rho v^2 ll'} = f\left(\frac{\mu}{\rho v\sqrt{ll'}}\right). \qquad (۳۶)$$

براي مستطیلِ مدل هم داریم

$$\frac{F_0}{\rho_0 v_0^2 l_0 l_0'} = f\left(\frac{\mu_0}{\rho_0 v_0\sqrt{l_0 l_0'}}\right). \qquad (۳۷)$$

اما با توجه به این که $ll' = 10^4 l_0 l_0'$، $\rho = 10^{-1}\rho_0$، $v = v_0$، و $\mu = 0.10\mu_0$

$$\frac{\mu}{\rho v\sqrt{ll'}} = \frac{\mu_0}{\rho_0 v_0\sqrt{l_0 l_0'}}$$

چون سمت راستِ روابطِ (۳۲) و (۳۳) یکی است پس سمتِ چپِ آن‌ها هم باید مساوی باشد. بنا بر این

$$\frac{F}{\rho v^2 ll'} = \frac{F_0}{\rho_0 v_0^2 l_0 l_0'}$$

که با جای‌گذاری خواهیم داشت.

$$F = 10^3 F_0.$$