فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات

۱ـ۱ مقدمه

قاب ها توسط دافین[۱] و اسچفر[۲] [۷] برای نشان دادن برخی از سوالات پایه ای در سری های فوریه غیر هارمونیک تعریف شده اند. بنابراین قاب ها در پردازش سیگنال بسیار کاربرد دارند، اما امروزه نیز کاربردهای فراوانی در ریاضیات محض و کاربردی، مهندسی، پزشکی و حتی نقل و انتقال ذره دارند. برای مثال، ارسال دیجیتالی سیگنال های آنالوگ، اغلب بر مبنای قاب است. به دلیل ساختار سیگنال های دیجیتال در خصوص از دست دادن داده، برای رمز گذاری بهتر است از قاب پارسوال هم نرم استفاده کنیم. علاوه بر این، از قاب ها برای جبران خطاهای کوانتیزه[۳] استفاده می شود که مجدداً بهتر است از قاب های پارسوال هم نرم استفاده شود. با وجود رواج زیاد آن ها، راه های محدودی برای تجزیه و تحلیل قاب ها وجود دارد.

نزدیک ترین قاب پارسوال به قاب $\{f_i\}_{i\in I}$ شناخته شده است.هم چنین نزدیک ترین قاب هم نرم به قاب داده شده را نیز می توان به راحتی پیدا کرد اما با وجود تلاش های قابل توجه تاکنون دانسته های ما درباره نزدیک ترین قاب پارسوال هم نرم به قاب داده شده بسیار کم است. این موارد در مسئله پالسون که در فصل سوم بیان خواهد شد خود را نشان می دهد.

مسئله پالسون به عنوان یکی از دشوارترین مسائل در نظریه قاب شناخته شده است. سوال اساسی که اینجا وجود دارد این است که ایا واقعاً تابع مسئله پالسون یعنی $h(\varepsilon, M, N)$ به تعداد بردارهای قاب (N) بستگی دارد؟ تا به حال مواردی که بیانگر این مطلب باشد در دسترس نبوده است، با این حال طبق رابطه

$$h(\varepsilon, M, N) \leq ۱۶\varepsilon M.$$

می دانیم که این تابع باید به بعد فضا (M) بستگی داشته باشد. به مدت دوازده سال هیچ پیشرفتی روی مسئله پالسون صورت نگرفت، اما اخیراً پیشرفت هایی روی این مسئله انجام شده است. ابتدا بادمن[۴]و کاسازا[5] []از معادلات دیفرانسیل، برای به دست آوردن تخمینی از

[۱] Duffin
[۲] Schaeffer
[۳] Quantization
[۴] Bodmann
[5] Casazza

تابع مسئله پالسون استفاده کردند، که روش آن ها در فصل پایانی این پایان نامه آورده شده است، به این صورت که، ابتدا روشی برای پیدا کردن یک قاب پارسوال هم نرم در نزدیکی قاب داده شده ارائه می دهیم که یک تخمین عددی برای فاصله بین آن ها به دست می آید. روش جدیدی که معرفی می کنیم بر اساس دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی توابع برداری مقدار است که شامل یک روند روی مجموعه ای از قاب های پارسوال که به قاب های پارسوال هم نرم همگرا هستند، می باشد. سپس طول کمانی که به وسیله قاب طی شده را با یک انتگرال از قاب انرژی، کراندار می کنیم. با یک کران نمایی روی قاب انرژی، تخمین عددی برای فاصله بین قاب پارسوال εـ نزدیک $F=\{f_۱, f_۲, \dots, f_N\}$ و قاب پارسوال هم نرم εـ نزدیک $G=\{g_۱, g_۲, \dots, g_N\}$ برای فضای هیلبرت با بعد M به دست می آوریم؛ یعنی :

$$(\sum_{i=۱}^{N} \| f_i - g_i \|^۲)^{\frac{۱}{۲}} \leq \frac{۲۹}{۸} M^۲ N (N-۱)^۸ \varepsilon.$$

برای کار با این روش، باید فرض کنیم که M و N نسبت به هم اول هستند. و سپس از تکنیک حاصل ضرب تانسوری استفاده می کنیم و نشان می دهیم که شرط اول بودن اهمیت ندارد.

کاسازا، فیکوس[۶] و میکسون[۷] [۹] با استفاده از شیب نزولی پتانسیل قاب یک جواب کاملاً متفاوت را برای مسئله پالسون ارائه دادند که در مواردی که M و N نسبت به هم اول باشند، کاربرد دارد. به نظر می رسد که تخمین های این دو مقاله [۷, ۹] کاملاً از پاسخ مطلوب دور هستند، زیرا از مرتبه $M^۲N^۹\varepsilon$ هستند و بهترین استدلال، نشان می دهد که پاسخ باید به شکل $cM\varepsilon$ یا در بدترین حالت به شکل $cN\varepsilon$ باشد. در فصل چهارم نشان می دهیم که مسئله پالسون با یک مسئله اساسی در نظریه عملگرها به نام مسئله تصویر، معادل است. در فصل پنجم، مکمل نایمارک قاب های پارسوال تقریباً هم نرم را بررسی می کنیم. مشاهده خواهیم کرد که برای یک قاب پارسوال، تابع پالسون قاب و مکمل نایمارک آن، با هم یک رابطه طبیعی دارند. به عنوان یک نتیجه از این مطلب خواهیم دید که مسئله پالسون را باید فقط در حالت $N \leq ۲M$ بررسی کنیم.

۱ـ۲ تعاریف و مباحث اولیه

تعریف ۱ـ۲ـ۱. فضای ضرب داخلی V ، یک فضای برداری روی اعداد مختلط $\mathbb{C}$ با نگاشت $<.,.> : V \times V \to \mathbb{C}$ می باشد که ضرب داخلی [۸] نام دارد ، و برای همه بردارهای $x, y, z \in V$ و اسکالرهای $\alpha \in \mathbb{C}$ دارای سه خاصیت زیر است

الف) $<x,y> = <\overline{y,x}>$.

ب) $<x+y,z> = <x,z> + <y,z>$.

ج) $<x,x> \geq ۰$.

[۶] Fickus
[۷] Mixon
[۸] Inner product

که در مورد خاصیت ج ، حالت تساوی رخ می دهد اگر و تنها اگر $x = ۰$.

تعریف ۱ـ۲ـ۲. فضای هیلبرت[۹]، یک فضای ضرب داخلی است که با نرم القائی زیر، تام است.

$$\| . \|= \sqrt{< . >} \quad .$$

مثال ۱ـ۲ـ۳. مثال هایی از ضرب های داخلی روی فضاهای هیلبرت شناخته شده، در زیر آورده شده است.

الف) میدان $\mathbb{C}$ تحت ضرب داخلی $< x, y >= x\bar{y}$ ، یک فضای هیلبرت است.

ب) به طور کلی، $\mathbb{C}^n$ تحت ضرب نقطه ای[۱۰]، که برای دو بردار $x = (x_۱, x_۲, \dots, x_n)$ و $y = (y_۱, y_۲, \dots, y_n)$ به صورت زیر تعریف می شود، یک فضای هیلبرت است.

$$x.y = x\bar{y} = \sum_{i=۱}^{n} x_i\bar{y}_i \, .$$

ج) فضای نامتناهی البعد $l^۲(\mathbb{N})$ تحت ضرب داخلی زیر، یک فضای هیلبرت است.

$$< x, y >= \sum_{i=۱}^{\infty} x_i\bar{y}_i. \qquad (x, y \in l^۲(\mathbb{N}))$$

د) فضای توابع انتگرال پذیر $L^۲([a, b])$ تحت ضرب داخلی زیر، یک فضای هیلبرت است.

$$< f, g >= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx. \qquad (f, g \in L^۲([a, b]))$$

تعریف ۱ـ۲ـ۴. فرض کنید X و Y دو فضای برداری باشند، تابع $T : X \to Y$ را تبدیل خطی[۱۱] گویند، هرگاه

الف) برای هر $x, y \in X$؛

$$T(x + y) = T(x) + T(y).$$

ب) برای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$؛

$$T(\alpha x) = \alpha T(x).$$

اگر $X = Y$ باشد، T را یک عملگر خطی[۱۲] گویند. اگر $sup\{\| Tx \|:\| x \|\leq ۱\} < +\infty$، T را تبدیل خطی کراندار می نامند.

---

[۹] Hilbert space

[۱۰] Dot product

[۱۱] Linear transformation

[۱۲] Linear operator

تعریف ۱ـ۲ـ۵. فرض کنید H و K دو فضای هیلبرت بوده و $T : H \to K$ یک نگاشت خطی کراندار باشد. در این صورت نگاشت خطی کراندار و یکتای $T^* : K \to H$ وجود دارد که برای $x \in H$ و $y \in K$:

$$< Tx, y >=< x, T^*y >,$$

و

$$\| T \|=\| T^* \| \ .$$

T^* را نگاشت الحاقی T می گویند. اگر $T = T^*$ باشد، نگاشت T را خودالحاق [۱۳] گویند.

تعریف ۱ـ۲ـ۶. عملگر T را روی فضای هیلبرت H مثبت می نامند، هر گاه T خودالحاق بوده و برای هر $x \in H$ ، $< Tx, x >$ مثبت باشد.

قضیه ۱ـ۲ـ۷. *فرض کنید T عملگری مثبت روی H باشد به طوری که برای $\circ < \alpha < \beta$ داشته باشیم*

$$\alpha I \leq T \leq \beta I \, ;$$

در این صورت T وارون پذیر است و

$$\frac{\text{۱}}{\beta} I \leq T^{-\text{۱}} \leq \frac{\text{۱}}{\alpha} I \, .$$

تعریف ۱ـ۲ـ۸. دنباله $\{x_n\}$ در فضای باناخ متناهی البعد E، یک پایه برای E است، هر گاه برای هر $x \in E$، دنباله یکتای $\{\alpha_n\}$ از اسکالرها موجود باشد که :

$$x = \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} \alpha_n x_n \, .$$

یعنی :

$$\lim_{n\to\infty} \| x - \sum_{i=\text{۱}}^{n} \alpha_i x_i \|= \circ \, .$$

تعریف ۱ـ۲ـ۹. زیر مجموعه Y از فضای هیلبرت H را مجموعه متعامد گویند، اگر هر دو عنصر متمایز آن بر هم عمود باشند.

تعریف ۱ـ۲ـ۱۰. یک زیر مجموعه متعامد یکه، مجموعه متعامدی است که هر عنصر آن، بردار یکه باشد. هر مجموعه متعامد یکه، مستقل خطی است.

تعریف ۱ـ۲ـ۱۱. دنباله $\{e_k\}_{k=\text{۱}}^{\infty}$ از بردارهای فضای هیلبرت H، یک پایه متعامد یکه [۱۴] است اگر $\{e_k\}_{k=\text{۱}}^{\infty}$ یک دستگاه متعامد یکه باشد. یعنی :

$$< e_k, e_j >= \delta_{kj} = \begin{cases} \circ & k \neq j \\ \text{۱} & k = j \end{cases} \quad .$$

که δ_{kj} تابع دلتای دیراک[۱۵]است.

[۱۳] Self-adjoint
[۱۴] Orthonormal basis
[۱۵] Dirac delta function

تعریف ۱ـ۲ـ۱۲. تابع دلتای دیراک را می توان چنین تعریف کرد:

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty & , \quad x=۰\\ ۰ & , \quad x\neq ۰\end{cases} \qquad ; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=۱.$$

یکی از نتایج این تعریف، این است که :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx=f(۰)\,.$$

قضیه ۱ـ۲ـ۱۳. ([]) *برای یک دستگاه متعامد یکه شرایط زیر معادلند :*

الف) $\{e_n\}_{n=۱}^{\infty}$ *یک پایه متعامد یکه است.*

ب) *برای هر* $f\in H$، $f=\sum_{n=۱}^{\infty}<f,e_n>e_n$.

ج) *برای هر* $f,g\in H$، $<f,g>=\sum_{n=۱}^{\infty}<f,e_n><e_n,g>$.

د) *برای هر* $f\in H$، $\sum_{n=۱}^{\infty}|<f,e_n>|^۲=\|f\|^۲$.

ه) $\overline{span}\{e_n\}_{n=۱}^{\infty}=H$.

و) *اگر برای* $n\in\mathbb{N}$، $<f,e_n>=۰$ *آنگاه* $f=۰$.

نکته ۱ـ۲ـ۱۴. اگر $\{e_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در H یک پایه متعامد یکه باشد، شرط (د) را اتحاد پارسوال نامند.

مثال ۱ـ۲ـ۱۵. خانواده $\{e_n\}_{n=۱}^{\infty}$ که به صورت زیر تعریف می شود، یک پایه متعامد یکه (پایه استاندارد) برای $l^۲(\mathbb{N})$ است.

$$\begin{aligned}
e_۱&=(۱,۰,۰,۰,\dots)\\
e_۲&=(۰,۱,۰,۰,\dots)\\
e_۳&=(۰,۰,۱,۰,\dots)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

مثال ۱ـ۲ـ۱۶. خانواده $\{\frac{۱}{۲\pi}e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای هیلبرت $L^۲[(-\pi,\pi)]$. است، که به آن پایه فوریه استاندارد [۱۶] می گویند.

مثال ۱ـ۲ـ۱۷. دنباله ای از چند جمله ای های $\{۱,x,x^۲-\frac{۱}{۳},x^۳-\frac{۳}{۵}x,\dots\}$ که به چندجمله ای های لژندر [۱۷] معروف هستند، یک پایه متعامد یکه برای $L^۲[(-۱,۱)]$ می باشد، که نمی توان آن را به راحتی محاسبه کرد.

پایه های متعامد یکه بسیار مهم و دارای خواص مطلوب بسیاری هستند، و با دو نتیجه خیلی مهم که در زیر آمده، توصیف می شوند.

[۱۶] Standard Fourier basis
[۱۷] Legendre polynomials

قضیه ۱ـ۲ـ۱۸. (*تجدید آرایش کامل*[۱۸]) *اگر* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *پایه متعامد یکه برای فضای هیلبرت* H *باشد، آنگاه برای هر* $x \in H$*،*

$$x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} < x, e_n > e_n \,.$$

قضیه ۱ـ۲ـ۱۹. (*اتحاد پارسوال*[۱۹]) *اگر* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *پایه متعامد یکه برای فضای هیلبرت* H *باشد، آنگاه برای هر* $x \in H$*،*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |< x, e_n >|^{۲} =\| x \|^{۲} \;.$$

اتحاد پارسوال شگفت آور است، اما عجیب تر، این است که بسیاری از خانواده ها این ویژگی را دارند، اما پایه متعامد یکه نیستند.

گزاره ۱ـ۲ـ۲۰. ([]) *رئوس یک* n*ـ ضلعی منتظم در* $\mathbb{R}^{۲}$*، در اتحاد پارسوال صدق می کند.*

قضیه ۱ـ۲ـ۲۱. *اگر* $T : X \to X$ *کراندار و* $\| I - T \| <۱$ *باشد، آنگاه* T *معکوس پذیر است و*

$$T^{-۱} = \sum_{k=\circ}^{\infty} (I - T)^k \,.$$

هم چنین

$$\| T^{-۱} \| \leq \frac{۱}{۱- \| I - T \|} \,.$$

تعریف ۱ـ۲ـ۲۲. عملگر $P : H_N \to H_N$ را یک تصویر [۲۰] می گویند، اگر $P^{۲} = P$. علاوه بر این، اگر $P^* = P$ باشد، P را یک تصویر متعامد [۲۱] گویند.

قضیه ۱ـ۲ـ۲۳. *فرض کنید* P *یک تصویر باشد، در این صورت* P^**،* $I_N - P$ *و* $I_N - P^*$ *نیز تصویر هستند.*

تعریف ۱ـ۲ـ۲۴. عملگر U را یکانی [۲۲] می گویند اگر

$$UU^* = U^*U = I.$$

که منظور از U^* الحاقی عملگر U است.

تعریف ۱ـ۲ـ۲۵. ([]) اگر S یک عملگر روی فضای هیلبرت M بعدی H_M و $\{e_i\}_{i=۱}^M$ پایه متعامد یکه H_M باشد، $Tr[S]$ به صورت زیر تعریف می شود

$$Tr[S] = \sum_{i=۱}^{M} < Se_i, e_i > .$$

[۱۸] Perfect reconstruction
[۱۹] Parseval's identity
[۲۰] Projection
[۲۱] Orthogonal projection
[۲۲] Unitary operator

تعریف ۱ـ۲ـ۲۶. نابرابری کوشی ـ شوارتز بیان می کند که برای هر دو بردار دلخواه x و y در فضای ضرب داخلی، داریم

$$|< x, y >|^{۲} \leq < x, x > . < y, y > \ .$$

هم چنین با گرفتن ریشه دوم از طرفین و با توجه به نرم بردارها، نامساوی به شکل زیر نوشته می شود

$$|< x, y >| \leq \| x \| . \| y \| \ .$$

تعریف ۱ـ۲ـ۲۷. ([]) ماتریس هرمیتی [۲۳]، ماتریسی مربعی است، که ترانهاده مزدوج مختلط آن با خودش برابر است.

مثال ۱ـ۲ـ۲۸.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۲+i & ۴ \\ ۲-i & ۳ & i \\ ۴ & -i & ۱ \end{bmatrix}$$

مشاهده می کنید که در ماتریس بالا، $A = \bar{A}^t$. بنابراین، ماتریس A هرمیتی است.

[۲۳] Hermitian