σـ گسسته@numberlistalse

بسم الله الرحمن الرحیم

چکیده

در این پایان نامه برخی خواص توپولوژیکی گروههای پارا توپولوژیک و نیم توپولوژیک مورد بررسی قرار می گیرد. شرایطی را به دست می آوریم که تحت آن ها گروه پارا توپولوژیک یا نیم توپولوژیک به یک گروه توپولوژیک تبدیل می شود. کلمات کلیدی: گروه پارا توپولوژیک، نیم توپولوژیک، گروه توپولوژیک، فضای بئر، شبکه شمارا، تقارن پذیر ن

فهرست مطالب

مقدمه

چه موقع یک گروه پاراتوپولوژیک گروه توپولوژیک است؟ طبق قضیه معروف الیس [۱] (سال ۱۹۵۷) می دانیم هر گروه نیم توپولوژیک هاسدورف موضعا فشرده ، یک گروه توپولوژیک است. اخیرا بوزیاد این قضیه را به فضاهای فشرده چخ [۲] گسترش داد است. ونتایج بسیاری از آن بدست آورده است.

زلازکو[۳] سال (۱۹۶۰) نشان داد هر گروه پارا توپوپولوژیک متریک پذیر یک گروه توپولوژیک است. در سال ۱۹۸۲ برند [۴] یافته های زلازکو و الیس را تعمیم داد و اثبات کردکه هرگروه پاراتوپولوژیک یک گروه توپولوژیک فشرده چخ است. سه سال بعد اثبات جدید و کوتاهتری از این قضیه ارائه شد. با توجه به این مطلب فیستر [۵] در سال (۱۹۸۵) پرسید:

آیا هر گروه فشرده چخ نیم توپولوژیک یک گروه پارا توپولوژیک است ؟ و از این رو بنا برقضیه برند یک گروه توپولوژیک است؟

در فصل اول این پایان نامه، قضایا و تعاریف مقدماتی را می آوریم و در فصل دوم ، ثابت می کنیم که هر گروه پاراتوپولوژیک هاسدورف متریک پذیر با ویژگی بئر یک گروه توپولوژیک است. این تعمیم یافته قضیه کلاسیک مونتگومری [۶] است.

همچنین در این پایان نامه دو حکم جدید را که بوزیاد ثابت کرده می آوریم. ۱ــ اگرگروه پاراتوپولوژیک G پیش تصویری از یک گروه توپولوژیک تحت همریختی کامل باشد آنگاه G نیز گروه توپولوژیک است.

۲ــاگر گروه پاراتوپولوژیک H تصویری از گروه توپولوژیک کلا کراندار G تحت همریختی پیوسته باشد، آنگاه H نیز گروه توپولوژیک است.

همچنین ثابت می کنیم اگر یک گروه نیم توپولوژیک شمارای نوع اول G یک زیر مجموعه چگال G_δ از یک فشرده سازی هاسدورف G باشد، آنگاه G یک گروه توپولوژیک متریک پذیر با یک متر کامل است.

درفصل سوم رابطه جدید معینی بین پایایی توابع کاردینالی در گروههای پاراتوپولوژیک اثبات می کنیم. در

[۱]Ellis [۲]Čech-complete [۳]W.Żelazko [۴]N.Brand [۵]H.pfister [۶]Montgomery

حقیقت نشان می دهیم که اگر G یک گروه دو دنباله ای پاراتوپولوژیک باشد به طوریکه $G \times G$ لیندولف باشد آنگاه G شبکه ی شمارا دارد.

این موضوع روشن می کند که چرا مربع خط سورجنفری نرمال نیست.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این پایان نامه مجموعه اعداد صحیح نا منفی ، اعداد گویا ، طبیعی ، اعدا حقیقی مثبت و اعداد حقیقی را به ترتیب با ω، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{R}^+$ و $\mathbb{R}$ نشان می دهیم. نگاشت وارون گروه G را با $I : G \longrightarrow G$ که $I(x) = x^{-1}$
،

درون G را با $int(G)$ یا $(G)^o$ ،

و نگاشت ضرب روی گروه G را با $m : G \times G \longrightarrow G$ که $m(x,y) = xy$ نشان می دهیم. در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی از توپولوژی و کاربردهای آن می پردازیم.

تعریف ۱.۱. الف. تمام اشتراک های شمارش پذیر از مجموعه های باز را یک مجموعه G_δ می نامیم.

ب. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. خانواده $\mathscr{B}$ از بازها را یک پایه می نامیم هرگاه هر زیرمجموعه باز از X را بتوان به صورت اجتماعی از عناصر $\mathscr{B}$ نوشت.
مجموعه$\mathscr{E}$از بازها را یک زیرپایه می نامیم هرگاه مجموعه متشکل از تمام اشتراک‌های متناهی از عناصر $\mathscr{E}$ یک پایه باشد.

ج. پایه شمارا: گوییم فضای X در نقطه x پایه شمارا دارد هرگاه گردایه شمارایی از همسایگی های x مانند B موجود باشد به طوریکه هر همسایگی x دست کم حاوی یک عضو این گردایه باشد.
اگرفضایی در هر نقطه اش یک پایه شمارا داشته باشد گوییم در اولین اصل شمارایی صدق می کند (شمارای نوع اول).

د. فضایی را شمارای نوع دوم گوییم که توپولوژی آن پایه ای شمارا داشته باشد.

به این معنی که فضای توپولوژیک T شمارای نوع دوم است اگر تعدادی شمارا مجموعه $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ از زیر مجموعه های باز T موجود باشد به طوریکه هر زیر مجموعه باز از T را بتوان به صورت اجتماعی از تعدادی اعضای زیر خانواده $\mathcal{U}$ نوشت.

ه. فضایی را T_1 گوییم اگر برای هر جفت نقطه جدا از هم x و y در فضا، مجموعه بازی که شامل x باشد ولی شامل y نباشد موجود باشد. یا به طور معادل فضایی T_1 است اگر تمام تک عضوی های آن بسته باشد.

و. مجموعه $\mathscr{U}$ در فضای توپولوژی X گسسته است اگر هر نقطه $x \in \mathscr{U}$ همسایگی مثل U داشته باشد به طوریکه $U \cap \mathscr{U} = \{x\}$.

ز. مجموعه $\mathscr{U}$ را σـ گسسته [1] گوییم اگر $\mathscr{U}$ بتواند به شکل $\mathscr{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ بیان شود که در آن هر U_n گسسته است .

تعریف ۲.۱. اگر $\mathcal{U}$ و$\mathcal{V}$ پوشش هایی برای مجموعه X باشند ، مجموعه $\mathcal{V}$ تظریف مجموعه $\mathcal{U}$ گفته می شود اگر برای هر $V \in \mathcal{V}$ یک $U \in \mathcal{U}$ وجود داشته باشد به طوریکه $V \subset U$.

تعریف ۳.۱. یک مجموعه به همراه یک عمل دو تایی،که خواص زیر را داشته باشد یک گروه می نامیم.

(۱) شرکت پذیر باشد .

(۲) دارای عضو خنثی باشد.

(۳) دارای وارون باشد.

اگر عمل دوتایی علاوه بر خواص بالا دارای خاصیت جابه‌جایی باشد، به آن گروه جابه‌جایی یا گروه آبلی می‌گویند.

تعریف ۴.۱. گروه توپولوژیک: فرض کنیم G یک گروه باشد که بعلاوه یک فضای توپولوژیک است. اگر نگاشتهای

$$G \times G \longrightarrow G \qquad \text{با ضابطه ی} \qquad (x,y) \longrightarrow xy$$

و

[1] σ-discrete

$$G \longrightarrow G \qquad \text{با ضابطه ی} \qquad x \longrightarrow x^{-۱}$$

پیوسته باشد آنگاه G یک گروه توپولوژیک نامیده می شود.

پیوستگی نگاشت وارون در $a \in G$ یعنی برای هر همسایگی $V = Nb(a^{-۱})$ همسایگی U حول a موجود باشد که $I(U) = U^{-۱} \subset V$.

پیوستگی عمل ضرب در $(a,b) \in G \times G$ یعنی؛ برای هر همسایگی $U = Nb(ab)$ همسایگی V از a و W از b موجود باشد به طوریکه $VW \subset U$ ، که در آن $VW = \{xy : x \in V, y \in W\}$ است.

مثال. اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ همراه با عمل جمع و توپولوژی معمولی، تشکیل یک گروه توپولوژیک می دهد . به طور کلی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ به همراه جمع و توپولوژی استاندارد یک گروه توپولوژیکی است. بعلاوه گروههای جمعی از همه فضاهای برداری توپولوژیک مانند باناخ و هیلبرت گروههای توپولوژیک هستند.

فرض کنید G یک گروه توپولوژیک باشد و f به شکل

$$f : G \times G \longrightarrow G \qquad \text{که} \qquad (a,b) \longrightarrow ab$$

تعریف شده باشد. f را به طور همزمان، (تواماً) پیوسته گوییم هر گاه اگر

$$(x_\alpha, y_\alpha) \longrightarrow (a,b)$$

آنگاه

$$x_\alpha y_\alpha \longrightarrow ab.$$

با توجه به تعریف، f را جدا گانه پیوسته گوییم اگر

$$x_\alpha \longrightarrow a$$

آنگاه برای هر $b \in G$؛

$$x_\alpha b \longrightarrow ab.$$

و اگر

$$y_\alpha \longrightarrow b$$

آنگاه برای هر $a \in G$؛

$$ay_\alpha \longrightarrow ab$$

ویا به بیان دیگر؛

$G \longrightarrow G$: L_a با تعریف $L_a(x) = ax$ و $G \longrightarrow G$: R_b با تعریف $R_b(x) = xb$ پیوسته باشد.

Abstract

In this Thesis Several new facts concerning topologies of paratopological and semitopological groups are established. It is proved that every symmetrizable paratopological group with the Baire property is a topological group.If a paratopological group G is the preimage under a perfect homomorphism of a topological group, then G is also a topological group. If a paratopological group G is a dense G_δ-subset of a regular pseudocompact space X, then G is a topological group.If a paratopological group H is an image of a totally bounded topological group G under a continuous homomorphism, then H is also a topological group. If a first countable semitopological group G is G_δ-dense in some Hausdorff compactification of G, then G is a topological group metrizable by a complete metric.We also establish certain new connections between cardinal invariants in paratopological and semitopological groups. In particular, it is proved that if G is a bisequential paratopological group such that G × G is Lindelöf, then G has a countable network. This sheds a new light on why the square of the Sorgenfrey line is not normal.

Keywords: Paratopological groups; Semitopological groups; Symmetrizable spaces; Baire property; Countable network; Paracompact p-space.

Zanjan University

Science Faculty - Department of Mathematics

Master's Thesis

Title:

Paratopological and semitopological groups versus topological groups

Author:

Mohammad Mohammadi

Supervisor:

Dr. Habib Amiri

Jan 2016