فهرست مطالب

فصل اول

خطا ها در محاسبات عددی

1.1 مقدمه

در کارهای عملی، یک انجنیر نتیجهٔ نهایی را به صورت عددی بدست خواهد آورد. بطور مثال، یک جدول اعداد که از یک تجربه بدست می‌آید، نظر به این جدول اعداد، ممکن یک گراف ترسیم شود؛ یا یک سیستم معادلات خطی باید حل شود. هدف انالیز عددی ارایه روش‌های مؤثر برای بدست آوردن جواب‌های عددی چنین مسائل می‌باشد. این کتاب به عوض تحلیل و تجزیه روش‌های عددی با روش‌های تحلیل عددی سروکار دارد، زیرا هدف اصلی ما ارایه روش‌های عددی کمپیوترگرا، مؤثر و مطمئن برای حل مسائلی می‌باشد که در ساحات مختلف ریاضیات عالی پیش می‌آید.
مباحث عددی که در این کتاب بررسی شده اند عبارت اند از:

(آ) *معادلات الجبری و متعالی (غیر الجبری)*: حل معادلات غیر خطی از نوع $f(x) = 0$ در انجنیری خیلی زیاد مشاهده می‌شود. بطور مثال، معادله

$$\frac{M_0}{M_0 - u_f t} = e^{\frac{(u+gt)}{u_0}} \tag{1.1}$$

نظر به t یک معادله غیر خطی است طوریکه M_0، g، u، u_0، u_f داده شده است. این نوع معادلات در مطالعات راکتی بکار می‌رود.

(ب) *درونیابی*[1] : یک ست از نقاط (x_i, y_i)، $i = 1, 2, ..., n$، تابع $y = f(x)$ داده شده است، طوریکه طبیعت معادله $f(x)$ را بصورت واضح نمی دانیم، معمولاً ضرورت می‌افتد تا قیمت y را برای یک قیمت x در $x_0 < x < x_n$ دریافت

[1] Interpolation

نماییم. این روند بنام *درونیابی* یا انترپولیشن یاد می‌شود. هرگاه این روند با توابع چندین متحوله انجام شود، بنام درونیابی *چندین متحوله* یاد می‌شود.

(ج) *برازش منحنی* : این یک حالت خاصی است، طوریکه در آن نقاط داده شده دارای خطای گردکردن[1] و خطای قطع‌کردن[2] می‌باشد. در چنین حالات، فورمول‌های درونیابی نتایج رضایت‌بخش را بدست نمی دهد. نتایج تجربی معمولاً حاوی خطاها می‌باشد و درچنین حالات، روش این است تا یک منحنی را طوری دریافت نماییم که ازین نقاط گذشته باشد، و بعد این منحنی را برای دریافت مقادیر در نقاط میانی بکار می‌بریم. این مسئله معمولاً منتج به *هموار سازی دیتا* می‌شود.

(د) *مشتقگیری و انتیگرال‌گیری عددی* : در عمل معمولاً ضرورت می‌افتد تا قیمت‌های عددی افاده‌های ذیل را دریابیم:

(i) $\frac{dy}{dx}$، $\frac{d^2y}{dx^2}$، ... برای یک قیمت مشخص x در $x_0 < x < x_n$ و

(ii) $\int_{x_0}^{x_n} ydx$ طوریکه نقاط (x_i, y_i)، $i = 1, 2, ..., n$ داده شده اما معادله $y(x)$ داده نشده است. بطور مثال هرگاه در دوران یک میله، زاویه θ (به رادیان) در زمان t داده شده باشد، پس سرعت و تعجیل زاویوی در هر زمان دیگر را با استفاده از فورمول‌های مشتقگیری عددی محاسبه نموده می‌توانیم.

(ه) *متریکس‌ها و سیستم‌های خطی* : حل سیستم معادلات الجبری خطی و دریافت قیمت‌های‌ویژه و وکتورهای‌ویژه یک متریکس از جمله مسائل مهم در بخش‌های مانند: معادلات تفاضلی، میخانیک سیال، نظریه ساختمان‌ها و غیره... می‌باشد.

(و) *معادلات تفاضلی معمولی و قسمی* : مسائل انجنیری معمولاً با استفاده از معادلات تفاضلی معمولی و قسمی فورمول‌بندی می‌شود. بطور مثال، فورمول ریاضیکی سقوط یک جسم، یک معادله تفاضلی معمولی بوده و مسئله دریافت پایداری توزیع حرارت در یک ظرف، بصورت یک معادله تفاضلی قسمی فورمول‌بندی شده است. در بیشترین حالات، دریافت جواب دقیق مسئله ناممکن بوده و روش‌های عددی را بکار می‌بریم.

(ز) *معادلات انتیگرالی* : معادله‌ای که در آن تابع مجهول تحت علامت انتیگرال قرار داشته باشد، بنام معادله انتیگرالی یاد می‌شود. این نوع معادلات در بخش‌های مختلف ریاضیات عالی و فزیک مانند: حرکت گازها، ارتجاعیت، الکترو استاتیک

[1] Round-off

[2] Truncation

و غیره بکار می‌رود. شرح مختصر برخی روش‌های عمومی داده شده است. برای حل مسائل به روش‌های عددی، معمولاً از یک قیمت اولیه شروع نموده، بعد از انجام چندین مرحله نتیجه نهایی را محاسبه می‌نماییم. قیمت بدست آمده عددی یک قیمت تقریبی می‌باشد، زیرا نتیجه بدست آمده ممکن الی دو یا سه رقم اعشاری درست باشد. بر علاوه، روشی که بکار رفته است ممکن بصورت تقریبی فورمول‌بندی شده باشد، بنابرین خطای که در یک حل عددی وجود دارد، ممکن ناشی از خطای دیتا یا خطای روش یا هردو باشد. در بخش **??** برخی مفاهیم ابتدایی مربوط به خطاها وتحلیل آنها را بررسی کرده ایم، چون این مفاهیم برای استفاده مؤثر روش‌های عددی مهم و ضروری می‌باشد. قبل ازینکه در ارتباط به خطاها در محاسبات صحبت کنیم، برخی از نرم‌افزارها و زبان‌های کمپیوتری مهم را بررسی می‌کنیم.

فصل دوم

حل معادلات الجبری و متعالی

1.2 مقدمه

در مطالعات ساینسی و انجنیری یک مسئله‌ای که به تکرار ظاهر می‌شود، دریافت جذر معادله

$$f(x) = 0 \tag{1.2}$$

می‌باشد. هرگاه $f(x)$ یک افاده درجه دوم، درجه سوم یا درجه چهارم باشد، برای ارایه جذور آن از جنس ضرایب، فورمول‌های الجبری در دسترس است. از طرف دیگر، هرگاه $f(x)$ یک پولینوم با درجه بلندتر یا یک افاده‌ای شامل توابع متعالی باشد، برای دریافت جذور آن روش‌های الجبری وجود ندارد، و باید به روش‌های تقریبی متوسل شد. در این فصل روش‌های عددی مختلف برای حل معادله (1.2) بیان شده است، طوریکه $f(x)$ یک معادله الجبری یا متعالی یا ترکیب از هر دو باشد. توابع الجبری مانند:

$$f_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n, \tag{2.2}$$

بنام توابع *پولینومی* یاد می‌شود که برای دریافت جذور آن برخی از روش‌های خاص را بررسی می‌کنیم. یک تابع غیرالجبری مانند، $f(x) = \ln x^3 - 0.7$، $\phi(x) = e^{-0.5x} - 5x$، $\psi = \sin^2 x - x^2 - 2$ و ... بنام تابع *متعالی* (غیرالجبری) یاد می‌شود. جذور معادله (1.2) ممکن حقیقی و یا مختلط باشد. در اینجا روش‌های دریافت یک جذر حقیقی معادلات الجبری یا متعالی را بررسی نموده و همچنان روش‌های دریافت جذور حقیقی و مختلط پولینوم‌ها را مطالعه می‌کنیم. برعلاوه، حل سیستم معادلات غیرخطی در اخیر این فصل بررسی خواهد شد. هرگاه $f(x)$ یک پولینوم مانند معادله (2.2) باشد، برای دریافت جذور آن نکات ذیل مهم پنداشته می‌شود.

(i) هر معادله پولینومی درجه n تنها وتنها n جذر دارد.

(ii) هرگاه n تاق باشد، معادله پولینومی حداقل یک جذر حقیقی دارد که علامت آن مخالف علامت حد اخیر آن می‌باشد.

(iii) هرگاه n جفت و حد ثابت منفی باشد، پس معادله حداقل یک جذر مثبت و منفی دارد.

(iv) هرگاه معادله پولینومی دارای ضرایب حقیقی (vآ) باشد، پس معادله دارای جذور مختلط جوره‌ای می‌باشد. و هرگاه معادله پولینومی دارای ضرایب ناطق (vب) باشد، پس معادله دارای جذور جوره‌ای غیرناطق می‌باشد.

(v) *قاعده علامت دیکارت*

(آ) در یک معادله پولینومی $f(x) = 0$ تعداد جذرهای حقیقی مثبت از تعداد تغییر علامت‌های ضرایب $f(x)$ بیشتر بوده نمی تواند.

(ب) در یک معادله پولینومی $f(x) = 0$ تعداد جذرهای حقیقی منفی از تعداد تغییر علامت‌های ضرایب $f(-x)$ بیشتر بوده نمی تواند.

2.2 روش تنصیف

این روش مبتنی بر قضیه (**??**) می‌باشد که بیان می‌کند: هرگاه تابع $f(x)$ بین a و b متمادی و $f(a)$ و $f(b)$ دارای علامات مخالف باشد، پس حداقل یک جذر معادله بین a و b وجود دارد. فرض کنیم $f(a)$ منفی و $f(b)$ مثبت باشد، پس جذر بین a و b قرار دارد، انتروال $[a, b]$ را تنصیف می‌نماییم و $x_0 = \frac{a+b}{2}$ قرار می‌دهیم. اگر $f(x_0) = 0$ باشد، در نتیجه x_0 جذر معادله است. در غیر آن جذر معادله بین x_0 و a یا بین x_0 و b قرار دارد و مربوط علامت مثبت و منفی $f(x_0)$ می‌باشد. فرض کنیم $f(x_0)$ منفی باشد، پس جذر معادله بین x_0 و b قرار دارد. انتروال جدید $[a_1, b_1] = [x_0, b]$ را که دارای طول $\frac{|b-a|}{2}$ می‌باشد در نظر می‌گیریم. مانند بالا، انتروال فوق در x_1 نصف می‌شود و انتروال جدید دقیقا نصف انتروال قبلی می‌باشد. این روند را تا وقتی تکرار می‌کنیم که آخرین انتروال (که جذر را در بر دارد) تا حد دلخواه مانند ε کوچک شود. واضح است که طول انتروال در هر مرحله با یک عامل ½ کاهش می‌یابد و در اخیر مرحله nـ‌ام انتروال جدید برابر به $[a_n, b_n]$ و طول آن $\frac{|b-a|}{2^n}$ می‌باشد. پس داریم:

$$\frac{|b-a|}{2^n} \leq \varepsilon,$$

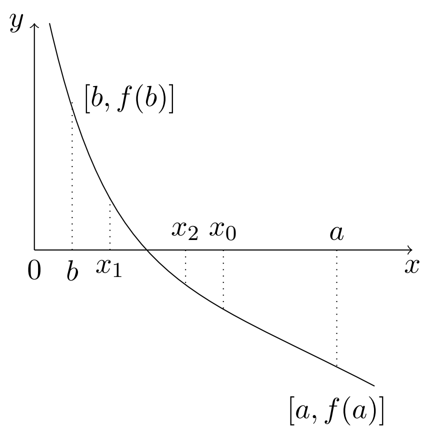
که بعد از ساده‌سازی بدست می‌آید:

$$n \geq \frac{\log_e\left(\frac{|b-a|}{\varepsilon}\right)}{2^n}. \tag{3.2}$$

معادله (3.2) تعداد تکرارهای (Iterations) مورد نیاز را برای بدست آوردن یک دقت برابر به ε بدست می‌دهد. بطور مثال اگر $|b-a|=1$ و $\varepsilon=0.001$ باشد، پس می‌توان دریافت که

$$n \geq 10, \tag{4.2}$$

این روش بصورت گرافیک در شکل 1.2 نمایش داده شده است. قابل یادآوری است



شکل 1.2: نمایش گرافیک روش تنصیف.

که این روش همیشه متقارب است. هرگاه تعداد جذرها در یک انتروال بیشتر از یک باشد، روش تنصیف تنها یکی از جذور را دریافت می‌نماید. این روش با استفاده از مراحل ذیل به سادگی قابل پروگرام است.

1. دو عدد a و b را طوری انتخاب می‌نماییم که $f(a)f(b)<0$ باشد.
2. بعد $x_r=\frac{b-a}{2}$ قرار می‌دهیم.
3. (آ) هرگاه $f(a)f(x_r)<0$ باشد، جذر معادله در انتروال (a, x_r) قرار دارد. پس $b=x_r$ قرار داده و به مرحله 2 برگردید.

   (ب) هرگاه $f(a)f(x_r)>0$ باشد، جذر معادله در انتروال (x_r, b) قرار دارد. پس $a=x_r$ قرار داده و به مرحله 2 برگردید.

(ج) هرگاه $f(a)f(x_r)=0$ باشد، پس x_r جذر معادله $f(x)=0$ می‌باشد. و روند محاسبه را پایان دهید.

در مسائل عملی، جذر دقیق معادله ممکن دریافت نشود، بنابرین جز (3ج) هیچگاه صدق نمی کند. درچنین حالات به یک معیار دیگر تصمیم‌گیری برای توقف روند محاسبه ضرورت داریم. یک معیار ساده این است که فیصدی خطای ε_r را قرار ذیل محاسبه نماییم:

$$\varepsilon_r=\left|\frac{x'_r-x_r}{x'_r}\right|\times 100\% \tag{5.2}$$

طوریکه x'_r یک قیمت جدید x_r می‌باشد. روند محاسبات زمانی خاتمه می‌یابد که ε_r از خطای پیش‌بینی‌شده قابل‌قبول ε_p کوچکتر باشد. برعلاوه، برای پایان بخشیدن روند محاسبات تعداد اعظمی تکرارها نیز می‌تواند در نظر گرفته شود.

مثال 1.2. یک جذر حقیقی معادله $f(x)=x^3-x-1=0$ را دریافت نمایید.

چون $f(1)$ منفی و $f(2)$ مثبت است، یک جذر بین 1 و 2 قرار دارد، بنابرین $x_0=3/2$ می‌باشد. پس

$$f(x_0)=\frac{27}{8}-\frac{3}{2}=\frac{15}{8},$$

که یک قیمت مثبت است. بنابرین جذر بین 1 و 1.5 قرار داشته و داریم:

$$x_1=\frac{1+1.5}{2}=1.25.$$

حال، $f(x_1)=-\frac{19}{64}$ را دریافت می‌نماییم که یک قیمت منفی می‌باشد. در نتیجه جذر بین 1.25 و 1.5 قرار دارد. بنابرین

$$x_2=\frac{1.25+1.5}{2}=1.375.$$

این روش را تکرار می‌کنیم و قیمت‌های تقریبی متوالی ذیل بدست می‌آید.

$x_3=1.3125$ ، $x_4=1.34375$ ، $x_5=1.328125$ ، ...

مثال 2.2. یک جذر حقیقی معادله $f(x)=x^3-2x-5=0$ را دریافت نمایید.

چون $f(2) = -1$ منفی و $f(3) = 16$ مثبت است، یک جذر بین 2 و 3 قرار دارد، بنابرین $x_0 = 5/2$ می‌باشد. چون $f(x_0) = 5.6250$ یک عدد مثبت است. بنابرین جذر بین 2 و 2.5 قرار داشته و داریم:

$$x_1 = \frac{2 + 2.5}{2} = 2.25,$$

و $f(x_1) = 1.890625$ می‌باشد. بنابرین نتیجه می‌شود که جذر بین 2 و 2.25 قرار دارد. در نتیجه

$$x_2 = \frac{2 + 2.25}{2} = 2.125,$$

و $f(x_2) = 0.3457$ می‌باشد. بنابرین نتیجه می‌شود که جذر بین 2 و 2.125 قرار دارد. در نتیجه

$$x_3 = \frac{2 + 2.125}{2} = 2.0625,$$

این روند را تکرار می‌کنیم و قیمت‌های تقریبی متوالی ذیل بدست می‌آید.

$$x_4 = 2.09375,\ x_5 = 2.10938, \quad x_6 = 2.10156,\ x_7 = 2.09766,$$
$$x_8 = 2.09570,\ x_9 = 2.09473, \quad x_{10} = 2.09424,\ \ldots$$

داریم:

$$x_{10} - x_9 = -0.0005,$$

و

$$\left|\frac{x_{10} - x_9}{x_{10}}\right| \times 100 = \frac{0.0005}{2.09424} \times 100 = 0.02\%$$

بنابرین، 2.094 یک جذر معادله فوق بوده و الی سه رقم اعشاری درست می‌باشد.

مثال 3.2. یک جذر حقیقی معادله $f(x) = x^3 + x^2 + x + 7 = 0$ را الی سه رقم اعشاری درست دریافت نمایید.

معادله داده شده یک معادله درجه سوم و حد اخیر آن مثبت می‌باشد. بنابرین معادله $f(x) = 0$ یک جذر حقیقی منفی خواهد داشت. می‌یابیم که

$f(-1) = 6$، $f(-2) = 1$ و $f(-3) = -14$

در نتیجه یک جذر حقیقی بین -3 و -2 قرار دارد. داریم:

$$x_1 = \frac{-2 - 3}{2} = -2.5.$$

چون $f(-2.5) = -4.875$ می‌باشد. بنابرین جذر بین -2 و -2.5 قرار دارد. در نتیجه

$$x_2 = \frac{-2 - 2.5}{2} = -2.25.$$

چون $f(x_2) = -1.5781$ می‌باشد. بنابرین جذر بین -2 و -2.5 قرار دارد. در نتیجه

$$x_3 = \frac{-2 - 2.25}{2} = -2.125.$$

این روند را تکرار نموده و قیمت‌های تقریبی متوالی ذیل را بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} x_4 &= -2.0625, & x_5 &= -2.0938, & x_6 &= -2.1094, \\ x_7 &= -2.1016, & x_8 &= -2.1055, & x_9 &= -2.1035, \\ x_{10} &= -2.1045, & x_{11} &= -2.1050, & & \ldots \end{aligned}$$

تفاوت بین x_{10} و x_{11} مساوی به 0.0005 می‌باشد، بنابرین جذر داده‌شده -2.105 الی سه رقم اعشاری درست می‌باشد.

مثال 4.2. یک جذر حقیقی معادله $x = e^{-x}$ را بین 0 و 1 با خطای 0.05% دریافت نمایید.

فرض کنیم

$$f(x) = xe^{-x} - 1 = 0.$$

داریم که $f(0) = -1$ و $f(1) = e - 1$ مثبت می‌باشد. بنابرین یک جذر معادله بین 0 و 1 وجود دارد. و

$$x_1 = \frac{0 + 1}{2} = 1.5.$$

چون $f(x_1) = -0.1756$ می‌باشد. بنابرین جذر بین 0.5 و 1 قرار دارد. در نتیجه

$$x_2 = \frac{0.5 + 1}{2} = 0.75.$$

در این مرحله خطای ε_1 قرار ذیل می‌باشد.

$$\varepsilon_1 = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| \times 100 = \frac{0.25}{0.75} \times 100 = 33.33\%$$

چون $f(x_2) = 0.5878$ می‌باشد، پس جذر بین 0.5 و 0.75 قرار دارد. در نتیجه

$$x_2 = \frac{0.5 + 0.75}{2} = 0.625.$$

همچنان

$$\varepsilon_2 = \left|\frac{0.625 - 0.75}{0.625}\right| \times 100 = 20\%.$$

این روند را تکرار نموده و قیمت‌های تقریبی متوالی و خطاها را در هر مرحله قرار ذیل بدست می‌آوریم.

$$\begin{array}{llll}
x_4 = 0.5625, & \varepsilon_3 = 11.11\%, & x_5 = 0.5938, & \varepsilon_4 = 5.26\%, \\
x_6 = 0.5781, & \varepsilon_5 = 2.71\%, & x_7 = 0.5703, & \varepsilon_6 = 1.37\%, \\
x_8 = 0.5664, & \varepsilon_7 = 0.69\%, & x_9 = 0.5684, & \varepsilon_8 = 0.35\%, \\
x_{10} = 0.5674, & \varepsilon_9 = 0.18\%, & x_{11} = 0.5669, & \varepsilon_{10} = 0.09\%, \\
x_{12} = 0.5671, & \varepsilon_{11} = 0.035\%, & \ldots &
\end{array}$$

چون $\varepsilon_{11} = 0.035\% < 0.05\%$ می‌باشد جذر 0.567 الی سه رقم اعشاری درست می‌باشد.

مثال 5.2. یک جذر حقیقی معادله $f(x) = 4e^{-x}\sin x - 1$ را بین 0 و 0.5 الی سه رقم اعشاری درست دریافت نمایید.

فرض کنیم

$$f(x) = 4e^{-x}\sin x - 1.$$

چون $f(0) = -1$ و $f(0.5) = 0.163145$ می‌باشد. بنابرین

$$x_1 = 0.25.$$

چون $f(0.25) = -0.22929$ می‌باشد. بنابرین جذر بین 0.25 و 0.5 قرار دارد. در نتیجه

$$x_2 = \frac{0.75}{2} = 0.375.$$

قیمت‌های تقریبی متوالی قرار ذیل داده شده است

$$\begin{array}{lll}
x_3 = 0.3125, & x_4 = 0.3438, & x_5 = 0.3594, \\
x_6 = 0.3672, & x_7 = 0.3711, & x_8 = 0.3692, \\
x_9 = 0.3102, & x_{10} = 0.3706, & x_{11} = 0.3704, \ldots
\end{array}$$

بنابرین جذر مورد نظر 0.371 بوده که الی سه رقم اعشاری درست می‌باشد.