

سمینار کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

الگوریتم های جدید برای تعیین معکوس ماتریس ها

استاد راهنما

دکتر

دانشجو

بهار ۱۳۹۶

فهرست مطالب

۳	۱ تعاریف و مفاهیم اولیه
۴	۱.۱ مقدمه
۵	۲ الگوریتم معکوس ماتریس های k -سه قطری
۶	۱.۲ مقدمه
۶	۲.۲ ساخت الگوریتم

فهرست جدول ها

چکیده

این سمینار الگوریتم‌های جدیدی برای تعیین معکوس ماتریس‌های k -سه قطری، k -پنج قطری و k -هفت قطری را با استفاده از تجزیه دولیتل LU آن‌ها معرفی می‌کند. مرتبه هر الگوریتم به کمک ارزیابی تعداد عملیات محاسباتی در هر گام از الگوریتم داده شده است. در انتهای هر فصل تعدادی مثال عددی را با توجه به الگوریتم‌ها بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: ماتریس‌های k -قطری، تجزیه دولیتل LU ، معکوس ماتریس، الگوریتم.

پیش‌گفتار

ماتریس‌های k -سه قطری، k -پنج قطری و k -هفت قطری اغلب در بسیاری از مسائل از جمله محاسبات موازی، تحلیل سیستم‌های مخابراتی، حل معادلات دیفرانسیل جزئی، مسائل مقدار اولیه و غیره بوجود می‌آیند. معکوس ماتریس‌های k -سه قطری و k -پنج قطری توسط بسیاری از نویسندگان مورد توجه قرار گرفته است. برای مثال مراجع ببینید.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

این فصل به معرفی و بیان تعاریف مورد نیاز که در فصل های بعد مورد استفاده قرار می گیرند، پرداخته شده است. در ابتدا به تعریف ماتریس هایی که در این سمینار به آن ها نیاز داریم، می پردازیم. که در آن $1 \leq k < \frac{n}{p}$ به ازای $\frac{n}{p} \leq k < \frac{n}{q}$ ماتریس $R_n^{(k)}$ یک ماتریس k -پنج قطری به صورت $(??)$ ، به ازای $\frac{n}{q} \leq k < n$ یک ماتریس k -سه قطری به شکل $(??)$ ، به ازای $k \geq n$ یک ماتریس قطری و برای $k = 1$ یک ماتریس هفت قطری به صورت $(??)$ است.

تعریف ۱.۱. تجزیه یک ماتریس مربعی $n \times n$ به صورت ضرب دو ماتریس، L و U که L یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر روی قطر اصلی یک و U یک ماتریس بالا مثلثی است را تجزیه دولیتل LU یک ماتریس گویند.

فصل ۲

الگوریتم معکوس ماتریس های k -سه قطری

۱.۲ مقدمه

این فصل از سمینار بر اساس مرجع تنظیم شده است. ماتریس (؟؟) اغلب در بسیاری از مسائل از جمله، محاسبات موازی، تحلیل سیستم های مخابراتی، حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تفاضلات متناهی، انتقال گرما و مسائل جریان های سیال پدیدار می شوند. خوانندگان علاقمند می توانند به مراجع رجوع کنند. معکوس ماتریس های سه قطری (؟؟) توسط بسیاری از نویسندگان مورد بررسی قرار گرفته است. ماتریس (؟؟) نقش مهمی در توصیف اعداد k -فیبونانچی^۱ تعمیم یافته دارد و اخیرا مورد توجه برخی نویسندگان قرار گرفته است. عناصر غیر صفر ماتریس (؟؟) تنها در $3n - 2k$ محل حافظه توسط سه بردار $a = [a_1, a_2, \dots, a_{n-k}]$ ، $b = [b_1, b_2, \dots, b_{n-k}]$ و $d = [d_1, d_2, \dots, d_n]$ ذخیره می شوند و در نتیجه حافظه کمتری اشغال می شود.

معکوس ماتریس های k -سه قطری (؟؟) به تازگی در موارد خاصی مورد توجه قرار گرفته است. در معکوس ماتریس های k -سه قطری توسط ساختار توپلیتز^۲ آن ها با تحمیل برخی شرایط محدود کننده مورد مطالعه قرار گرفته است. اما در اینجا ما معکوس هر ماتریس نامنفرد $T_n^{(k)}$ را بدون اعمال شرایط محدود کننده بررسی می کنیم.

۲.۲ ساخت الگوریتم

در این بخش ما ساختمان یک الگوریتم محاسباتی را برای تعیین معکوس هر ماتریس k -سه قطری نامنفرد بررسی خواهیم کرد. برای این منظور بردار n -مؤلفه ای $c = [c_1, c_2, \dots, c_n]$ که مؤلفه های آن به صورت زیر تعریف می شوند را در نظر می گیریم.

$$c_i = \begin{cases} d_i, & i = 1, 2, \dots, k \\ d_i - y_{i-k} b_{i-k} & i = k+1, k+2, \dots, n \end{cases} \quad (1.2)$$

که برای $i = 1, 2, \dots, n-k$ ، $y_i = \frac{a_i}{c_i}$ با استفاده از بردار c در (۱.۲) نتایج زیر را داریم.

^۱k-Fibonacci^۲Toeplitz

لم ۱.۲. فرض کنید $T_n^{(k)}$ یک ماتریس k -سه قطری به صورت (۳.۲) و به ازای هر $i = 1, 2, \dots, n$ و به $c_i \neq 0$ و به ازای هر $i = 1, 2, \dots, n-k$ باشد، آنگاه تجزیه دولیتل LU ماتریس $T_n^{(k)}$ به صورت $T_n^{(k)} = L_n^{(k)} U_n^{(k)}$ است که در آن

$$L_n^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ z_1 & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & z_2 & \ddots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & z_{n-k} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U_n^{(k)} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-k} \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & c_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & & & & & 0 & c_n \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

و

$$\det(T_n^{(k)}) = \prod_{i=1}^n c_i. \quad (3.2)$$

قضیه ۲.۲. فرض کنید $T_n^{(k)}$ یک ماتریس k -سه قطری به صورت (۳.۲) و به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ و به $c_i \neq 0$ باشد، آنگاه ماتریس $T_n^{(k)}$ نامنفرد است. اگر $(T_n^{(k)})^{-1} = H = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n$ آنگاه برای $i, j = 1, 2, \dots, n$ داریم،

$$\alpha_{ii} = \begin{cases} \frac{1}{c_i} & i = n, n-1, \dots, n-k+1 \\ \frac{1}{c_i} + y_i z_i \alpha_{i+k, i+k} & i = n-k, n-k-1, \dots, 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

و

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} -y_i \alpha_{i+k, j} & i < j, \quad j \equiv i \pmod{k} \\ -z_j \alpha_{i, j+k} & i > j, \quad i \equiv j \pmod{k} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (5.2)$$

تذکر ۳.۲. معادله (۳.۲) تا زمانی که به ازای $i = 1, 2, \dots, n-k$ و $c_i \neq 0$ باشند، برقرار است. با این وجود اگر به ازای برخی $i \in \{1, 2, \dots, n-k\}$ باشد $c_i = 0$ آنگاه $\det(T_n^{(k)})$ با استفاده از الگوریتم نمادین k -DETGR

که در آمده است محاسبه می شود.

تذکر ۴.۲. از قضیه ۲.۲ در می یابیم که هر الگوریتم عددی برای تعیین معکوس ماتریس $T_n^{(k)}$ با شکست مواجه می شود اگر به ازای برخی $i \in \{1, 2, \dots, n-k\}$ ، $c_i = 0$ باشد. از این رو برای تعیین معکوس ماتریس $T_n^{(k)}$ ، الگوریتم نمادین زیر که هرگز با شکست مواجه نمی شود را معرفی می کنیم.

الگوریتم ۵.۲ *For* $i = 1, 2, \dots, k$ *do*

Set: $c_i = d_i$. *If* $c_i = 0$ *then* $c_i = x$ *end if.*

end do.

For $i = k+1, k+2, \dots, n$ *do*

Compute and simplify:

$$y_{i-k} = \frac{a_{i-k}}{c_{i-k}}$$

$c_i = d_i - b_{i-k}y_{i-k}$ *If* $c_i = 0$ *then* $c_i = x$ *end if.*

$$z_i = \frac{b_{i-k}}{c_{i-k}}$$

end do.

گام دوم: از الگوریتم برای بررسی ناتکین بودن ماتریس (؟؟) استفاده کن.

گام سوم: درایه های قطر اصلی ماتریس معکوس $H = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n$ ، α_{ii} ، $i = 1, 2, \dots, n$ را محاسبه کن:

For $i = n, n-1, \dots, n-k+1$ *do*

Compute and simplify: $\alpha_{ii} = \frac{1}{c_i}$

end do.

For $i = n-k, n-k-1, \dots, 1$ *do*

Compute and simplify:

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{c_i} + y_i z_i \alpha_{i+k, i+k}$$

end do.

گام چهارم: درایه های بالای قطر اصلی، $\alpha_{i,j}$ ، $i < j$ ، را محاسبه کن:

For $j = n, n - 1, \dots, 2$ **do**

For $i = j - k, j - 2k, \dots, 1$ **do**

Compute and simplify:

$$\alpha_{i,j} = -y_i \alpha_{i+k,j}$$

end do.

end do.

گام پنجم: درایه های زیر قطر اصلی، $\alpha_{i,j}$ ، $i > j$ ، را محاسبه کن:

For $i = n, n - 1, \dots, 2$ **do**

For $j = i - k, i - 2k, \dots, 1$ **do**

Compute and simplify:

$$\alpha_{i,j} = -z_j \alpha_{i,j+k}$$

end do.

end do.

گام ششم: ماتریس معکوس، $H|_{x=0}$ ، است.