حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

وحید دامن‌افشان

مدرس دانشگاه صنعتی کرمانشاه

انتشارات دانشگاه صنعتی کرمانشاه

۱۳۹۳

سرشناسه : دامن‌افشان، وحید، ۱۳۶۴

عنوان : حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

مشخصات نشر : کرمانشاه، دانشگاه صنعتی کرمانشاه، ۱۳۹۳=۲۰۱۴ م.

مشخصات ظاهری : ع+۲۷۳ ص. مصور، جدول.

فروست : دانشگاه صنعتی کرمانشاه؛ ۲۳۶

شابک : ۹-۰۰-۰۰۰۰-۶۰۰-۹۷۸

یادداشت : پشت جلد به انگلیسی: Calculus and Analytic Geometry

یادداشت : کتاب‌نامه

یادداشت : نمایه

موضوع : علوم پایه

شناسه افزوده : دانشگاه صنعتی کرمانشاه

رده‌بندی کنگره : ۱۳۹۳ ۵آ۶ ن / ۲/XX۸۰۰

رده‌بندی دیویی : ۵۰۰/۵

انتشارات دانشگاه صنعتی کرمانشاه ۲۳۶

عنوان کتاب: حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

تألیف: وحید دامن‌افشان

ویراستار ادبی: علی جبرائیلی

صفحه‌آرا: وحید دامن‌افشان

ناشر: دانشگاه صنعتی کرمانشاه

تاریخ و نوبت چاپ: ۱۳۹۳ ــ اول

شمارگان: ۱۰۰۰

قیمت: ۱۴۰۰۰ تومان

شابک: ۹-۰۰-۰۰۰۰-۶۰۰-۹۷۸

قطع: وزیری

چاپخانه: زلال

مراکز پخش: کتابیران، دانشیران

تقدیم به

همه آن‌هایی که می‌خواهند بیشتر بدانند...

پیش‌گفتار

با توجه به کاربرد و اهمیت روزافزون ریاضیات عمومی در کمک به درک و توجیه پدیده‌های علمی و نیز نظر به اینکه کتاب‌های ریاضی‌ای که تاکنون به زبان فارسی در رابطه با موضوع ریاضیات عمومی ترجمه یا تالیف شده است، نیازهای فعلی جامعه ریاضی و علمی را برآورده نمی‌کند، تصمیم به تالیف کتاب حاضر گرفته شد.

سطح این کتاب به گونه‌ای است که برای دانشجویان سال اول دوره کارشناسی رشته ریاضی و دانشجویان کارشناسی رشته‌های فیزیک، مکانیک و سایر رشته‌های مرتبط قابل استفاده است.

از ویژگی‌های این کتاب، توجه به سرفصل‌های درس نظریه ریاضیات همومی در دوره کارشناسی است؛ به گونه‌ای که تمامی سرفصل‌های مصوب وزارت علوم، تحقیقات و فناوری با بیانی ساده و قابل فهم آورده شده است. همچنین، با توجه به تعدد مثال‌ها، کتاب، به صورت خودخوان نیز قابل استفاده است.

کتاب حاضر از شش فصل تشکیل شده است. در فصل اول، مفاهیم و مقدمات اولیه مورد بررسی قرار گرفته و نیز قضیه اساسی وجودی و منحصر بفردی جواب بیان شده است.

در فصل دوم، مباحث و مطالب فصل اول، روی سیستم معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، توسیع داده شده است. همچنین در این فصل، سه روش مختلف برای حل سیستم معادلات ارایه شده است. لازم به ذکر است که روش حل سیستم معادلات با استفاده از روش جردن، بیشتر برای دوره‌های کارشناسی ارشد آورده شده است. لذا برای دوره‌های کارشناسی می‌توان از مطالعه این روش، چشم‌پوشی کرد. در ادامه فصل، معادلات دیفرانسیل مرتبه nام و قضیه‌های

مربوط به آن، بررسی شده است.

فصل سوم در ارتباط با مسایل مقدار مرزی و نظریه اشتورم است. در این فصل، قضیه‌های اساسی در ارتباط با مسایل مقدار مرزی، از جمله قضیه مقایسه‌ای و قضیه تفکیک آورده شده است.

در فصل چهارم، سیستم‌های دینامیکی معرفی شده است. تعاریف و مفاهیم نقاط ثابت، پایداری نقاط ثابت و تصویر فاز، با بیانی ساده و روان ارایه شده است.

فصل پنجم، درباره سیستم‌های دینامیکی خطی در صفحه بحث می‌کند. به بیان دقیق‌تر، سیستم‌های خطی متعارف و سیستم‌های خطی ساده در صفحه، بیان و تصاویر فاز مربوط به آن‌ها مورد کاوش قرار گرفته است.

فصل ششم درباره سیستم‌های غیرخطی در صفحه است. در واقع این فصل، دربرگیرنده مطالب تکمیلی فصل پنجم است. بیشتر مطالب این فصل، برای دوره‌های تحصیلات تکمیلی مناسب است.

کنون ای خردمند وصف خرد بدین جایگه گفتن اندرخورد کنون تا چه داری بیار از خرد که گوش نیوشنده زو برخورد خرد بهتر از هر چه ایزد بداد ستایش خرد را به از راه داد خرد رهنمای و خرد دلگشای خرد دست گیرد به هر دو سرای ازو شادمانی وزویت غمیست وزویت فزونی وزویت کمیست خرد تیره و مرد روشن روان نباشد همی شادمان یک زمان چه گفت آن خردمند مرد خرد که دانا ز گفتار از برخورد.کسی کو خرد را ندارد ز پیش دلش گردد از کردهٔ خویش ریش هشیوار دیوانه خواند ورا همان خویش بیگانه داند ورا ازویی به هر دو سرای ارجمند گسسته خرد پای دارد ببند خرد چشم جانست چون بنگری تو بی‌چشم شادان جهان نسپری نخست آفرینش خرد را شناس نگهبان جانست و آن سه پاس سه پاس تو چشم است وگوش و زبان کزین سه رسد نیک و بد بی‌گمان خرد را و جان را که یارد ستود و گر من ستایم که یارد شنود حکیما چو کس نیست گفتن چه سود ازین پس بگو کافرینش چه بود تویی کردهٔ کردگار جهان ببینی همی آشکار و نهان به گفتار دانندگان راه جوی به گیتی بپوی و به هر کس بگوی ز هر دانشی چون سخن بشنوی از آموختن یک زمان نغنوی چو دیدار یابی به شاخ سخن بدانی که دانش نیاید به بن. امید است که خوانندگان گرامی، نظرها و پیشنهادهای خود را با ما در میان گذاشته تا در چاپ‌های بعدی موجب غنی‌تر شدن کتاب گردد.

وحید دامن‌افشان

کرمانشاه، زمستان ۹۳

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

۱

مشتق و کاربرد آن در علوم مهندسی

مشتق‌ها به طور گسترده در علوم پایه، اقتصاد، پزشکی و علوم کامپیوتر برای محاسبه سرعت اولیه و شتاب و به به منظور توضیح رفتار ماشین‌آلات، تخمین میزان افت آب در هنگام پمپ شدن آب از تانکر آب و پیشگویی نتایج ایجاد خطا در اندازه‌گیری‌ها به کار می‌رود. پیدا کردن مشتق‌ها می‌تواند طولانی و سخت باشد. در این فصل، تکنیک‌هایی برای محاسبه آسان‌تر آن‌ها بیان می‌شود.[۱]

[۱] Gerald Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley, Inc., USA, 2nd ed. , 1999. ISBN 0201400000

۱.۱ یادآوری حدهای یک‌طرفه و کاربرد آن‌ها

در این بخش ابتدا حدهای یک‌طرفه را یادآوری کرده و بعد از آن، به بیان مفهوم مشتق می‌پردازیم. سپس روابط و قضایای مشتق‌گیری را بیان می‌کنیم.

در تعریف $\lim_{x\to a} f(x)$، xهایی را در نظر می‌گیریم که در یک بازهٔ باز شامل a و نه خود a باشند؛ یعنی مقادیر x نزدیک به a را، چه بزرگ‌تر از a باشند و چه کوچک‌تر از آن باشند. حال فرض کنید تابعی مانند $f(x) = \sqrt{x - ۴}$ داریم. چون برای $x < ۴$، مقدار $f(x)$ وجود ندارد، بنابراین f در هیچ بازهٔ باز شامل ۴ تعریف نشده است. لذا $\lim_{x\to ۴} \sqrt{x - ۴}$

بی‌معنی است. شکل ۱.۱ را ببینید.

با وجود این، اگر x را فقط به مقادیر بزرگ‌تر از ۴ محدود کنیم، می‌توانیم مقدار $\sqrt{x-۴}$ را به اندازهٔ دلخواه به ۰ نزدیک کنیم؛ با شرط اینکه xها را بزرگ‌تر از ۴ ولی به اندازهٔ کافی نزدیک به ۴ بگیریم. در چنین حالتی، x را از سمت راست به ۴ میل می‌دهیم و آن‌را حد یک‌طرفه از راست و یا حد راست می‌نامیم. بنابراین

$$\lim_{x\to ۴^+} \sqrt{x-۴} = ۰.$$

حد چپ نیز به صورت مشابه تعریف می‌شود.[۲]

اگر تابع f در $x_۱$ تعریف شده باشد، آنگاه مشتق راست f در $x_۱$ با $f'_+(x_۱)$ نشان داده می‌شود و به صورت

$$f'_+(x_۱) = \lim_{\Delta x\to ۰^+} \frac{f(x_۱+\Delta x)-f(x_۱)}{\Delta x} \qquad (۱.۱)$$

و یا به عبارت دیگر،

$$f'_+(x_۱) = \lim_{x\to x_۱^+} \frac{f(x)-f(x_۱)}{x-x_۱} \qquad (۲.۱)$$

تعریف می‌شود؛ به شرطی که این حدود موجود باشند.

قضیهٔ ۱.۱.۱: وجود حد

گوییم $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود دارد و برابر L است، اگر و تنها اگر

$$\lim_{x\to a^+} f(x), \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

هر دو موجود و برابر با L باشند.

مثال ۲.۱.۱ فرض کنید تابع f مطابق شکل ۲.۱ و با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} -۱ & x<۰ \\ ۰ & x=۰ \\ ۱ & x>۰ \end{cases}$$

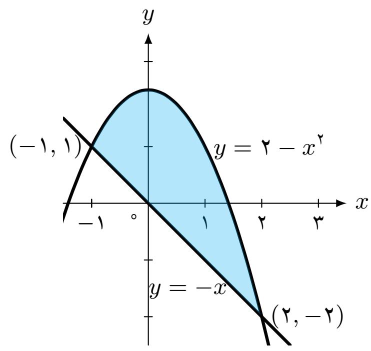
تعریف شده است. آیا حد[۳] تابع f وجود دارد؟

حل با توجه به تعریف تابع، اگر x عددی کوچک‌تر از ۰ باشد، $f(x)$ دارای مقدار ثابت -۱ است. لذا $\lim_{x\to ۰^-} f(x) = -۱$. با استدلالی مشابه، نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = +۱.$$

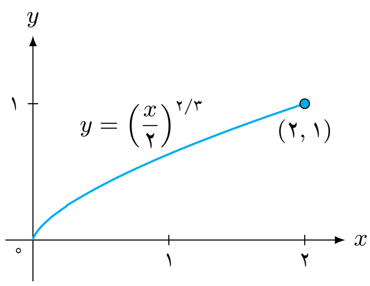
بنابراین

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) \neq \lim_{x\to ۰^+} f(x).$$



شکل ۱.۱ ناحیهٔ محصور ایجاد شده توسط سهمی $y = ۲ - x^۲$ و خط $y = -x$

[۲] George Thomas and Ross Finney. *Calculus and Analytic Geometry*. Addison-Wesley, Inc., USA, 9th ed. , 1996. ISBN 0201400154



شکل ۲.۱ نمودار تابع $y = \left(\frac{x}{۲}\right)^{۲/۳}$ در بازه $[۰, ۲]$

[۳] در ادامه فرض می‌شود خواننده تا حدودی با مفاهیم پایه‌ای حد آشناست.

مفهوم ارزیابی احتمال[۴]، ابتدا در ریاضیات مطرح شد و می‌توان گفت که در علوم کامپیوتر به صورت ضمنی استفاده می‌شود و فقط توسط جونز[۵] و پلاتکین[۶] به طور صریح به کار برده شده است.

[۴] با مقایسه این مفهوم با کارهای اخیر صاحب‌جهرمی یا کازن، طبیعی است که این سوال را بپرسیم که آیا ارزیابی‌ها می‌توانند به اندازه‌های بورل توسیع یابند؟

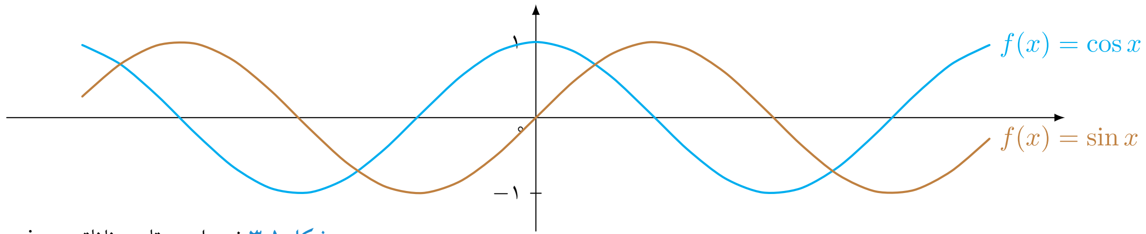
[۵] Jones

[۶] Plotkin

تعریف ۳.۱.۱ **مشتق تابع** مشتق تابع f، تابعی است که با علامت f' نشان داده می‌شود و مقدار آن در هر عدد x واقع در دامنهٔ f به صورت

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{۳.۱}$$

تعریف می‌شود؛ به شرطی که حد فوق وجود داشته باشد. شکل ۳.۱ را ببینید.



شکل ۳.۱ نمودار دو تابع مثلثاتی $y = \sin x$ و $y = \cos x$

۲.۱ انتگرال معین و نامعین و کاربرد آن در مهندسی

در این بخش، مفهوم انتگرال‌های معین و نامعین را توضیح داده[۷] و سپس خواص انتگرال معین بیان می‌شود. همچنین بعضی از کاربردهای انتگرال معین توضیح داده می‌شود. بعد از آن، نوبت به انتگرال‌های نامعین می‌رسد و روش‌های انتگرال‌گیری برای این نوع انتگرال‌ها شرح داده می‌شود.[۸]

[۷] خواننده باید دقت داشته باشد که تعریف انتگرال در کتاب‌های مختلف، اندکی از لحاظ ظاهری با یکدیگر تفاوت دارد.

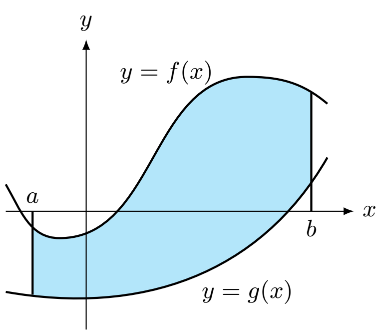
[۸] حسین خیری، وحید دامن‌افشان، مهسا مقدم، و وجیهه وفائی. *نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی و سیستم‌های دینامیکی*. انتشارات دانشگاه تبریز، تبریز، ویرایش اول، ۱۳۹۰

۱.۲.۱ انتگرال معین

فرض کنید $y = f(x)$ یک تابع پیوسته روی بازهٔ $[a,b]$ باشد. این بازه را به n زیربازه با انتخاب $n-۱$ نقطه مانند $x_۱$، $x_۲$، …، $x_{n-۱}$ بین a و b تقسیم می‌کنیم به شرطی که

$$a < x_۱ < x_۲ < \cdots < x_{n-۱} < b.$$

برای ایجاد یکنواختی، a را با $x_۰$ و b را با x_n نشان می‌دهیم. شکل ۴.۱ را ببینید.



شکل ۴.۱ ناحیه محصورشده بین دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$

قضیه ۱.۲.۱: قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌های معین

اگر f روی $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه یک cای در بازهٔ $[a,b]$ وجود دارد به طوری که

$$f(c) = \frac{۱}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

ناحیه ممکن است دارای شکل خاصی باشد که در این صورت، با استفاده از فرمول‌های هندسه می‌توانیم مساحت آنرا حساب کنیم.

اگر f و g توابع پیوسته‌ای روی بازهٔ $[a,b]$ و با شرط $f(x) \geq g(x)$ باشند، آنگاه مساحت ناحیهٔ بین منحنی‌های $y = f(x)$ و $y = g(x)$ از a تا b برابر است با[۹]

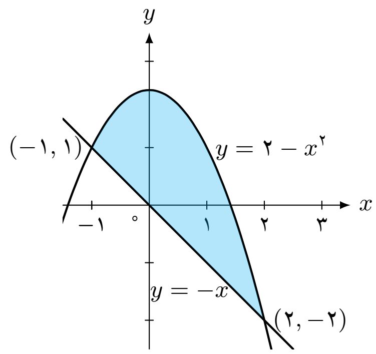
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx. \qquad (۴.۱)$$

[۹] Charalambos Aliprantis and Kim Border. *Infinite Dimensional Analysis*. Springer–Verlag, Berlin, Germany, 3rd ed. , 2006. ISBN 3540295860

۲.۲.۱ منحنی‌های قاطع یکدیگر

وقتی ناحیه‌ای توسط منحنی‌هایی که یکدیگر را قطع می‌کنند، مشخص می‌شود، نقاط تقاطع، حدود انتگرال‌گیری را تعیین می‌کنند. مثال بعدی، نمونه‌ای از این حالت را نشان می‌دهد.

مثال ۲.۲.۱ مساحت ناحیهٔ محصور ایجاد شده توسط سهمی $y = ۲ - x^۲$ و خط $y = -x$ را پیدا کنید.

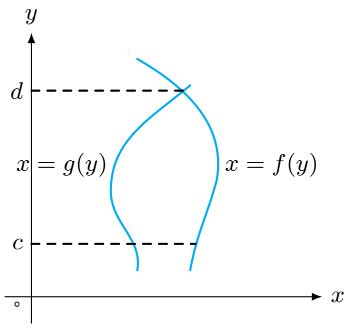


شکل ۵.۱ محل تقاطع دو نمودار $y = -x$ و $y = ۲ - x^۲$

حل ابتدا نمودار هر دو منحنی را رسم می‌کنیم (شکل ۵.۱). طبق رابطهٔ (۴.۱)، قرار می‌دهیم $f(x) = ۲ - x^۲$ و $g(x) = -x$. حال برای پیدا کردن حدود انتگرال‌گیری، معادلهٔ $۲ - x^۲ = -x$ را حل می‌کنیم. بنابراین $x^۲ - x - ۲ = ۰$. لذا می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \\ &= \int_{-۱}^{۲} (۲ + x - x^۲)dx \\ &= \left[۲x + \frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۳}{۳}\right]_{-۱}^{۲} \\ &= \left(۴ + \frac{۴}{۲} - \frac{۸}{۳}\right) - \left(-۲ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}\right) \end{aligned}$$

روش گفته شده در بالا، روش دیسک (شکل ۶.۱) نام دارد. روش دیگری نیز برای محاسبهٔ حجم حاصل از دوران وجود دارد که به روش واشر، معروف شده است.



شکل ۶.۱ نمودار منحنی‌های $x = g(y)$ و $x = f(y)$ در بازه $[c,d]$

تعریف ۳.۲.۱ روش واشر هرگاه ناحیه‌ای که برای تولید یک جسم، دوران داده می‌شود، محور دوران را قطع نکند، جسم تولید شده، دارای یک سوراخ خواهد بود. در این روش، از فرمول

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^۲ - [r(x)]^۲)\, dx \qquad (۵.۱)$$

استفاده می‌شود که در آن، $R(x)$ شعاع بیرونی و $r(x)$ شعاع داخلی واشر است.

دقت داشته باشید که در فرمول (۵.۱) اگر $r(x)$ در سراسر بازهٔ $[a,b]$ صفر باشد، همان فرمول روش دیسک، نتیجه می‌شود. بنابراین روش دیسک، حالت خاصی از روش واشر است.

سوالی که ممکن است در اینجا پیش بیاید این است که کدام‌یک از ۳ روش گفته شده، بهتر است؟ واقعیت این است که به طور قطع، نمی‌توان گفت که کدام روش، همیشه بهتر از بقیه عمل می‌کند. بنابراین در هر مساله، باید ابتدا ناحیه مورد نظر را رسم کرده و سپس با توجه به آن، بهترین روش را انتخاب کنیم.

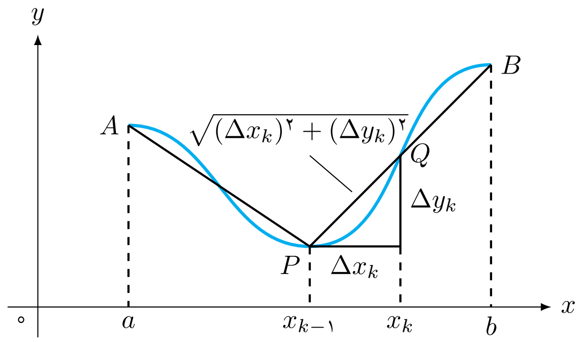
جسم‌های حاصل از دوران، جسم‌هایی هستند که شکل آن‌ها از دوران حول محورها به دست می‌آید. گاهی جسم‌های تولید شده، جسم‌هایی هستند که با استفاده از فرمول‌های هندسه، به راحتی می‌توانیم حجم آن‌ها را حساب کنیم؛ بنابراین

$$V = \int_c^d \pi([R(y)]^۲ - [r(y)]^۲)\, dy + \int_۰^۱ \pi\left(\left[\frac{۳}{۲}\right]^۲ - \left[\frac{۳}{۲} - \sqrt{y}\right]^۲\right) dy + -\pi \int_۰^۱ (۳\sqrt{y} - y)\, dy - \pi\left[۲y^{۳/۲} - \frac{y^۲}{۲}\right]_۰^۱$$

۳.۱ محاسبهٔ طول منحنی‌ها با روشی ابتکاری

فرض کنید می‌خواهیم طول منحنی $y = f(x)$ را از $x = a$ تا $x = b$ پیدا کنیم.[۱۰] طبق معمول، بازهٔ $[a, b]$ را افراز می‌کنیم و نقاط متناظر روی منحنی را با قطعه‌خط‌هایی به همدیگر وصل می‌کنیم تا یک مسیر چندضلعی تشکیل شود (شکل ۷.۱).

[۱۰] John Gilles. Charges as equilibrium prices and asset bubbles. *Journal of Mathematical Economics*, 18:155–167, 1989

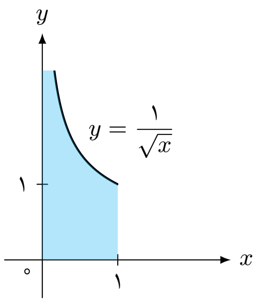


شکل ۷.۱ مسیر چندضلعی پوشاننده طول منحنی $y = f(x)$ از نقطه A تا نقطه B

تعریف ۱.۳.۱ اگر f روی بازهٔ $[a, b]$ هموار باشد، طول منحنی $y = f(x)$ از a تا b برابر است با

$$L = \int_a^b \sqrt{۱ + \left(\frac{dy}{dx}\right)^۲}\, dx = \int_a^b \sqrt{۱ + (f'(x))^۲}\, dx. \qquad (۶.۱)$$

گاهی ممکن است dy/dx در یک نقطهٔ خاص از بازهٔ انتگرال‌گیری موجود نباشد. در این حالت dx/dy را حساب می‌کنیم و x را بر حسب تابعی از y بیان می‌کنیم (شکل ۸.۱).



شکل ۸.۱ نمونه‌ای از تابعی با برد نامعین

۴.۱ انتگرال‌های ناسره

انتگرال‌های معینی که تا اینجا با آن‌ها سر و کار داشته‌ایم، دارای دو ویژگی بوده‌اند. یکی اینکه، دامنهٔ انتگرال‌گیری آن‌ها، یعنی a و b معین بود. دوم اینکه، برد انتگرالده روی این دامنه، معین بود. در ادامه یاد می‌گیریم که چگونه باید با این انتگرال‌ها برخورد کنیم (جدول ۱.۱).

جدول ۱.۱ نحوه عملکرد تابع f در ارتباط با پیوستگی

نام تابع	نقطه ناپیوستگی	نقطه بحرانی
تابع f	$x = ۱$	$a^۲ + ۳$
تابع g	$x = -۲$	$b - ۴$
تابع h	$x = ۰$	$a + b - ۷$

مثال ۱.۴.۱ همگرایی

$$\int_۰^۳ \frac{dx}{(x-۱)^{۲/۳}}$$

را بررسی کنید.

حل انتگرالده $f(x) = 1/(x-1)^{2/3}$ در $x = 1$ نامتناهی می‌شود؛ اما روی $[0, 1)$ و $(1, 3]$ پیوسته است. همگرایی انتگرال روی $[0, 3]$ به انتگرال‌های از ۰ تا ۱ و ۱ تا ۳ بستگی دارد. روی $[0, 1]$ داریم

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}\\ &= \lim_{b\to 1^-}[3(b-1)^{1/3} - 3(0-1)^{1/3}]\\ &= 3.\end{aligned}$$

۵.۱ محاسبهٔ حجم جسم‌های حاصل از دوران

جسم‌های حاصل از دوران، جسم‌هایی هستند که شکل آن‌ها از دوران حول محورها به دست می‌آید. گاهی جسم‌های تولید شده، جسم‌هایی هستند که با استفاده از فرمول‌های هندسه، به راحتی می‌توانیم حجم آن‌ها را حساب کنیم؛ اما گاهی شکل این جسم‌ها، منظم نیست و لذا ناچاریم برای محاسبهٔ حجم آن‌ها از حساب دیفرانسیل و انتگرال کمک بگیریم.

۱.۵.۱ حجم حاصل از دوران حول محور xها

حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ بین محور xها و نمودار تابع پیوستهٔ $y = R(x)$، $a \leq x \leq b$ حول محور xها برابر است با

$$V = \int_a^b \pi(R(x))^2\, dx \qquad (۷.۱)$$

۲.۵.۱ حجم حاصل از دوران حول محور yها

حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ بین محور yها و نمودار تابع پیوستهٔ $x = R(y)$، $c \leq y \leq d$ حول محور yها برابر است با

$$V = \int_c^d \pi(R(y))^2\, dy \qquad (۸.۱)$$

۲

کاربرد انتگرال‌ها در محاسبه حجم

جسم‌های حاصل از دوران، جسم‌هایی هستند که شکل آن‌ها از دوران حول محورها به دست می‌آید. گاهی جسم‌های تولید شده، جسم‌هایی هستند که با استفاده از فرمول‌های هندسه، به راحتی می‌توانیم حجم آن‌ها را حساب کنیم؛ اما گاهی شکل این جسم‌ها، منظم نیست و لذا ناچاریم برای محاسبهٔ حجم آن‌ها از حساب دیفرانسیل و انتگرال کمک بگیریم.

۱.۲ قواعد انتگرال‌گیری نامعین

حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ بین محور xها و نمودار تابع پیوستهٔ $y = R(x)$، $a \leq x \leq b$ حول محور xها برابر است با

$$V = \int_a^b \pi (R(x))^۲ \, dx \qquad (۱.۲)$$

مثال ۱.۱.۲ ناحیهٔ بین منحنی $y = \sqrt{x}$، $۰ \leq x \leq ۴$ و محور xها، برای تولید جسمی، حول محور xها دوران داده می‌شود. حجم آن‌را را پیدا کنید.

حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ بین محور yها و نمودار تابع پیوستهٔ $x = R(y)$،

$c \leq y \leq d$ حول محور yها برابر است با

$$V = \int_c^d \pi(R(y))^۲ \, dy \tag{۲.۲}$$

۲.۲ تکنیک‌های انتگرال‌گیری

۱.۲.۲ انتگرال‌گیری جزء به جزء

۲.۲.۲ جانشینی ساده‌کننده

۳.۲.۲ کسرهای جزیی

۳.۲ ظاهر شدن انتگرال اصلی در فرایند انتگرال‌گیری

۴.۲ سه جانشینی بنیادی

کتاب‌نامه

Charalambos Aliprantis and Kim Border. *Infinite Dimensional Analysis*. Springer–Verlag, Berlin, Germany, 3rd ed. , 2006. ISBN 3540295860.

Gerald Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley, Inc., USA, 2nd ed. , 1999. ISBN 0201400000.

John Gilles. Charges as equilibrium prices and asset bubbles. *Journal of Mathematical Economics*, 18:155–167, 1989.

George Thomas and Ross Finney. *Calculus and Analytic Geometry*. Addison-Wesley, Inc., USA, 9th ed. , 1996. ISBN 0201400154.

حسین خیری، وحید دامن‌افشان، مهسا مقدم، و وجیهه وفائی. *نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی و سیستم‌های دینامیکی*. انتشارات دانشگاه تبریز، تبریز، ویرایش اول، ۱۳۹۰.

نمایه

Calculus and Analytic Geometry

Vahid Damanafshan

Instructor Of The Kermanshah University Of Technology

Kermanshah University Of Technology Press

2015