Zar [Scale=.۹۵]XB

دانشکده ریاضیddddddddddddddddddddd

گروه ریاضی محض

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز

عنوان

حل معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی

زیر نظر

دکتر مهدی رمضانی

شهره مهران پور

۱۳۹۰

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ تعاریف

یک معادله انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد.

یک نمونه از یک معادله انتگرال که در آن $u(x)$ تابع مجهولی است که باید معلوم شود به صورت زیر است.

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt. \qquad (۱.۱)$$

مقادیر $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال هستند. $K(x,t)$ هسته معادلات انتگرال نامیده می شود.در معادله (۱.۱) تابع مجهول یعنی $u(x)$ تنها در زیر علامت انتگرال ظاهر شده است. و در حالت‌های دیگر ممکن است تابع مجهول در خارج از علامت انتگرال هم حضور داشته باشد. باید توجه کرد که هسته معادلات انتگرال یعنی $K(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل معلوم هستند. هدف ما تعیین تابع مجهول یعنی $u(x)$ است که در معادله (۱.۱) صدق کند.

۲.۱ تقسیم معادلات انتگرال خطی

متداول‌ترین معادلات انتگرال خطی را می توان به دو گروه معادلات انتگرال فردهلم و معادلات انتگرال ولترا دسته‌بندی کرد. منظور از معادلات انتگرال خطی این است که تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال خطی است یعنی توان یک دارد.

در این کتاب چهار نوع معادلات انتگرال خطی مورد بحث قرار خواهند گرفت.

۱. معادلات انتگرال فردهلم

۲. معادلات انتگرال ولترا

۳. معادلات انتگرال-دیفرانسیل

۴. معادلات انتگرال منفرد

۱.۲.۱ معادلات انتگرال خطی فردهلم

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم، که در آن حد پایین و حد بالای انتگرال‌گیری به ترتیب اعداد ثابت a و b هستند به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \quad a \leq x,t \leq b, \tag{۲.۱}$$

تابع $f(x)$ از قبل مشخص هستند و λ هم یک پارامتر معلوم می‌باشد.

بر حسب اینکه $\phi(x)$ کدامیک از مقادیر زیر را انتخاب کند معادلات انتگرال فردهلم خطی به دو دسته عمده تقسیم می‌شوند:

۱. زمانی که $\phi(x) = ۰$ معادله (۲.۱) به معادله زیر تبدیل می‌شود، که به آن معادله انتگرال فردهلم نوع اول می‌نامند.

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt = ۰. \tag{۳.۱}$$

۲. زمانی که $\phi(x) = ۱$ معادله (۲.۱) به معادله زیر تبدیل می‌شود، که به آن معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می‌نامند.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt. \tag{۴.۱}$$

۲.۲.۱ معادلات انتگرال خطی ولترا

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی ولترا، یعنی معادلاتی که در آنها حد بالا و پایین انتگرالگیری بجای اینکه یک عدد ثابتی باشد به صورت تابعی از x ظاهر می شود، به فرم زیر می‌باشد. باید به این نکته توجه کرد که این معادله یک حالت خاص معادلات انتگرال فردهلم در نظر گرفت به طوریکه هسته $K(x,t)$ برای $x < t$ و $x \in [a,b]$ صفر فرض شود.

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt, \tag{۵.۱}$$

دو گروه معادلات انتگرال ولترا به صورت زیر می‌باشد.

۱. زمانی که $\phi(x) = ۰$ معادله (۳.۱) به صورت زیر تبدیل خواهد شد، که به آن معادله انتگرال ولترا نوع اول می‌گویند.

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt = ۰. \qquad (۶.۱)$$

۲. زمانی که $\phi(x) = ۱$ معادله (۴.۱) به شکل زیر تبدیل خواهد شد، که به آن معادله انتگرال ولترا نوع دوم می‌نامند.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt. \qquad (۷.۱)$$

اگر در معادله انتگرال فردهلم نوع دوم (۴.۱) و معادله انتگرال ولترا نوع دوم (۷.۱) ، شرط $f(x) = ۰$ برقرار باشد، آنگاه معادله حاصل را یک معادله انتگرال همگن می‌نامند. در غیر این صورت معادله مورد نظر را یک معادله انتگرال غیرهمگن می‌گویند.

یک معادله انتگرال را منفرد(تکین) می‌نامند اگر که انتگرال‌گیری ناسره(مجازی) باشد. این معمولا زمانی رخ می‌دهد که فاصله انتگرال‌گیری نامتناهی باشد یا اینکه هسته معادله در یک یا تعداد بیشتری نقطه از حوزه مورد نظر یعنی $a \leq t \leq b$ بی‌کران باشد.

۳.۲.۱ معادلات انتگرال-دیفرانسیل

ولترا در اوایل **۱۹۰۰** در حال مطالعه موضوع **رشد جمعیت** بود که با معادلات انتگرال-دیفرانسیل مواجه شد. در این گونه معادلات تابع مجهول $u(x)$ در دو طرف ظاهر می‌شود. در یک طرف زیر علامت انتگرال و در طرف دیگر به عنوان یک مشتق معمولی نمایان می‌شود.

در زیر دو مثال که، مثال اول معادله انتگرال-دیفرانسیل فردهلم و مثال دوم معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترا آورده شده است.

۱. $u''(x) = ۱ - \frac{۱}{۳}x + \int_۰^۱ xtu(t)dt, \quad u(۰) = ۰ \ u'(۰) = ۱,$

۲. $u'(x) = -sinx - ۱ - \int_۰^x u(t)dt, \quad u(۰) = ۱.$

۴.۲.۱ معادلات انتگرال منفرد

معادله انتگرال از نوع اول

$$f(x) = \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt,$$

یا از نوع دوم

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt.$$

را که در آنها حد پایین، حد بالا یا هر دو حدود انتگرال‌گیری نامتناهی باشند، معادله انتگرال منفرد می‌نامند. به علاوه اگر هسته معادلات انتگرال‌گیری در یک نقطه یا در نقاط بیشتری از دامنه انتگرال‌گیری نامتناهی باشد، باز هم این گونه معادلات را معادلات انتگرال منفرد می‌نامند. در زیر دو مثال از معادلات انتگرال منفرد آورده شده است که علت منفرد نامیده شدن آنها نامتناهی بودن حوزه انتگرال‌گیری مربوط می‌باشد.

$$u(x) = ۱ + x^{۲} + \frac{۱}{۶}\int_{-\infty}^{\infty} (x+t)u(t)dt,$$

$$u(x) = ۲x + ۶\int_{۰}^{\infty} sin(x-t)u(t)dt.$$

در زیر دو مثال از معادلات انتگرال منفرد ارائه شده است. در این مثالها هسته $K(x,t)$ در اثنائی که $t \to x$ نامتناهی می‌شود، لذا معادلات انتگرال مربوط را منفرد می‌نامند.

$$u(x) = ۱ - ۲\sqrt{x} - \int_{۰}^{x} \frac{۱}{\sqrt{x-t}}u(t)dt,$$

$$x = \int_{۰}^{x} \frac{۱}{(x-t)^{\alpha}}u(t)dt.$$

مثال ۱.۲.۱. معادله انتگرال زیر را از نظر فردهلم یا ولترا بودن و از لحاظ خطی بودن یا غیرخطی بودن و همچنین از جنبه همگن یا غیرهمگن بودن دسته بندی کنید.

$$u(x) = \frac{۱}{۲} + x - \int_{۰}^{۱} (x-t)u^{۲}(t)dt,$$

این معادله یک معادله انتگرال فردهلم است زیرا حدود انتگرال‌گیری ثابت هستند اما از آنجا که تابع مجهول در زیر علامت انتگرال با توان ۲ ظاهر شده است غیرخطی است. با توجه به وجود تابع $f(x) = \frac{۱}{۲} + x$ خارج از علامت انتگرال، معادله غیرهمگن هم می‌باشد.

□

تمرین: در معادله‌های زیر، نوع هر کدام را از لحاظ فردهلم یا ولترا بودن، از جنبه خطی و یا غیرخطی بودن و از نظر همگن یا غیرهمگن بودن مشخص کنید.

۱. $u(x) = \frac{۳}{۴}x + \frac{۱}{۵} + \int_{۰}^{۱} (x-t)^{۳}u(t)dt,$

۲. $u(x) = ۱ + x^{۲} + \int_{۰}^{x} (x-t)u(t)dt,$

۳. $u(x) = e^{x} + \int_{۰}^{x} tu^{۲}(t)dt,$

در معادله‌های انتگرال-دیفرانسیل زیر، نوع هر کدام را از لحاظ فردهلم یا ولترا بودن و همچنین از نظر خطی یا غیرخطی بودن مشخص کنید.

۱. $u'(x) = 1+\int_0^x e^{-2t}u^3(t)dt, \quad u(0) = 1,$

۲. $u''(x) = \frac{1}{2}x^2-\int_0^x (x-t)u^3(t)dt, \quad u(0) = 1,\ u'(0) = 0,$

۳. $u'''(x) = sinx-x+\int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu'(t)dt, \quad u(0) = 1,\ u'(0) = 0,\ u''(0) = -1,$

در معادله‌های زیر، با انتگرال‌گیری از طرفین معادله در فاصله ۰ تا x و استفاده از شرط اولیه داده شده، معادله دیفرانسیل مربوط را به یک معادله انتگرال یا یک معادله انتگرال-دیفرانسیل متناظر آن تبدیل کنید.

۱. $u'(x) = 3x^2u(x), \quad u(0) = 1,$

۲. $u''(x) = 4xu^2(x), \quad u(0) = 2,\ u'(0) = 1.$

۳.۱ جواب یک معادله انتگرال

یک جواب معادله انتگرال یا معادله انتگرال-دیفرانسیل روی فاصله انتگرال‌گیری یک تابع $u(x)$ است به طوریکه آن تابع در معادله داده شده صدق کند. به عبارت دیگر اگر جواب داده شده در طرف راست معادله جایگذاری شود و در نتیجه دو طرف چپ و راست معادله با هم برابر شوند آنگاه $u(x)$ جواب معادله می‌باشد.

مثال ۱.۳.۱. نشان دهید که $u(x) = x$ یک جواب معادله انتگرال فردهلم زیر است.

$$u(x) = \frac{5}{6}x - \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\int_0^1 (x+t)u(t)dt.$$

حل: با جایگذاری $u(x) = x$ در طرف راست (RHS)معادله بالا بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} RHS &= \frac{5}{6}x - \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\int_0^1 (x+t)u(t)dt \\ &= \frac{5}{6}x - \frac{1}{9} + \frac{1}{3}[\frac{xt^2}{2} + \frac{t^3}{3}]_0^1 \\ &= x = u(x) = LHS \end{aligned}$$

اولین نکته مهمی که در ارتباط با جواب معادلات انتگرال یا معادلات انتگرال-دیفرانسیل وجود دارد این است که آیا جواب وجود دارد و اگر وجود دارد آیا جواب یکتا است یا نه؟ این‌ها مباحثی هستند که در کتب دیگر بررسی می‌شوند.

دومین نکته مهم آن است که که آیا این جواب با یک فرم بسته ای که قابل توصیف بر حسب توابع مقدماتی نظیر یک چندجمله ای یا یک تابع نمایی یا هذلولی یا مثلثاتی باشد، قابل نمایش است؟ البته همیشه نمی توانیم جواب را با یک فرم بسته مشخص کنیم اما به جای آن می توان جواب را به شکل یک سری بدست آورد.

جهت خاتمه دادن به این بخش معادله انتگرال غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$u(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 xu^2(t)dt,$$

که این معادله انتگرال دارای دو جواب واقعی به صورت زیر می‌باشد.

$$u(x) = x, 5x.$$

می‌توان با جایگذاری مستقیم به صحت این مطلب پی‌برد. البته موضوع یکتایی جواب در مورد این معادله انتگرال غیرخطی برقرار نیست.

$\square$

تمرین: در معادلات زیر نشان دهید که تابع داده شده یک جواب معادله انتگرال یا معادله انتگرال-دیفرانسیل مربوطه می‌باشد.

۱. $u(x) = 2coshx - xsinhx - 1 + \int_0^x tu(t)dt, \quad u(x) = coshx,$

۲. $u''(x) = xcosx - 2sinx + \int_0^x tu(t)dt, \quad u(0) = 0 \; u'(0) = 1 \; u(x) = sinx,$

۳. $\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}}u(t)dt = x^{\frac{3}{2}}, \quad u(x) = \frac{3}{2}.$

۴.۱ تبدیل مسائل مقدار مرزی به معادلات انتگرال فردهلم

روند کار مانند تبدیل مسائل مقدار اولیه به یک معادله انتگرال ولترا می‌باشد با این تفاوت که معمولا $y'(0)$ داده نمی‌شود لذا باید توجه خاصی جهت تعریف این کمیت مبذول شود. برای ارائه تصور عملی و بهتر از این روش به اعمال آن روی یک مثال می‌پردازیم:

مثال ۱.۴.۱. هدف تعیین یک معادله انتگرال فردهلم متناظر با مساله مقدار مرزی

$$y''(x) + y(x) = x, \quad 0 < x < \pi, \tag{8.1}$$

همراه شرائط مرزی به صورت زیر می‌باشد.

$$y(0) = 1, \; y(\pi) = \pi - 1. \tag{9.1}$$

حل: ابتدا قرار می‌دهیم:

$$y''(x) = u(x), \tag{۱۰.۱}$$

با انتگرال‌گیری از دو طرف (۱۰.۱) از ۰ تا x داریم:

$$\int_0^x y''(t)dt = \int_0^x u(t)dt, \tag{۱۱.۱}$$

و در نتیجه:

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x u(t)dt, \tag{۱۲.۱}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین معادله (۱۲.۱) از ۰ تا x و استفاده از شرائط مرزی در $x = 0$ و تبدیل انتگرال دوگانه حاصل به یک انتگرال یک گانه بدست می‌آوریم:

$$y(x) = 1 + xy'(0) + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \tag{۱۳.۱}$$

تنها چیزی که باید حساب کنیم $y'(0)$ می‌باشد که برای محاسبه آن در دو طرف معادله (۱۳.۱) مقدار $x = \pi$ را قرار می‌دهیم و از شرط مرزی در $x = \pi$ استفاده می‌کنیم لذا داریم:

$$y(\pi) = 1 + \pi y'(0) + \int_0^x (\pi-t)u(t)dt, \tag{۱۴.۱}$$

با تعیین $y'(0)$ از معادله (۱۴.۱) بدست می‌آوریم:

$$y'(0) = \frac{1}{\pi}\left\{(\pi-2) - \int_0^\pi (\pi-t)u(t)dt\right\}, \tag{۱۵.۱}$$

با قرار دادن عبارت (۱۵.۱) در رابطه (۱۳.۱) نتیجه می‌گیریم که:

$$y(x) = 1 + \frac{x}{\pi}\left((\pi-2) - \int_0^\pi (\pi-t)u(t)dt\right) + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \tag{۱۶.۱}$$

با جایگذاری مقادیر (۱۰.۱) و (۱۶.۱) در رابطه (۸.۱) بدست می‌آوریم:

$$u(x) = x - 1 - \frac{x}{\pi}\left((\pi-2) - \int_0^\pi (\pi-t)u(t)dt\right) - \int_0^\pi (x-t)u(t)dt, \tag{۱۷.۱}$$

اکنون با استفاده از رابطه

$$\int_0^\pi (.) = \int_0^x (.) + \int_x^\pi (.), \tag{۱۸.۱}$$

معادله (۱۷.۱) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$u(x) = x - 1 - \frac{x}{\pi}(\pi-2) + \frac{x}{\pi}\int_0^x (\pi-t)u(t)dt \tag{۱۹.۱}$$

$$+ \frac{x}{\pi}\int_x^\pi (\pi-t)u(t)dt - \int_0^x (x-t)u(t)dt, \tag{۲۰.۱}$$

بعد از انجام یک سری محاسبات ساده رابطه زیر را بدست می‌آوریم.

$$u(x)=\frac{۲x-\pi}{\pi}-\int_۰^x\frac{t(x-\pi)}{\pi}u(t)dt-\int_x^\pi\frac{x(t-\pi)}{\pi}u(t)dt, \qquad (۲۱.۱)$$

نهایتاً معادله انتگرال فردهلم نوع اول دوم مورد نظر به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$u(x)=\frac{۲x-\pi}{\pi}-\int_۰^\pi K(x,t)u(t)dt. \qquad (۲۲.۱)$$

البته $K(x,t)$ یعنی هسته آن معادله از طریق رابطه زیر تعیین می‌شود.

$$K(x,t)=\begin{cases}\frac{t(x-\pi)}{\pi}, & ۰\le t\le x,\\ \frac{x(t-\pi)}{\pi}, & x\le t\le\pi.\end{cases}$$

معادله (۲۱.۱) بدست آمده یک معادله انتگرال فردهلم غیر همگن است و این نتیجه معمولاً از تبدیل یک مساله مقدار مرزی غیرهمگن به معادله انتگرال معادل آن بدست می‌آید.

□

دستور فراخوانی عکس در این محیط

شکل ۱.۱: در این تصویر آوردن فرمول و شکل را در متن مشاهده می کنید.

شکل ۲.۱: در این تصویر ترکیبی از دایره های توپر و توخالی را مشاهده می کنید.

■

یک نمونه از جدول در این محیط

جدول شماره ۱ : Relation Symbols

♣ این جدول در رابطه با نشانه های رابطه ای بحث می کند.مثل رابطه کوچکتر یا بزرگتر مساوی و تساوی و زیرمجموعه و رابطه عضو بودن مجموعه و غیره.می توان نمونه هایی از آن را در جدول زیر مشاهده کرد.

★ توجه کنید که در جداول زیر در زیر ستون $Type$ کلمه ایی است که در محیط $LATEX$ تایپ می شود.و در زیر ستون $Typset$ جوابی که در PDF خواهیم گرفت.

Type	Typset	Type	Typset	Type	Typset
\equiv	$\equiv$	\geq	$\geq$	\leq	$\leq$
\sim	$\sim$	\succ	$\succ$	\prec	$\prec$
\simeq	$\simeq$	\succeq	$\succeq$	\preceq	$\preceq$
\asymp	$\asymp$	\gg	$\gg$	\ll	$\ll$
\approx	$\approx$	\supset	$\supset$	\subset	$\subset$
\cong	$\cong$	\supseteq	$\supseteq$	\subseteq	$\subseteq$
\neq	$\neq$	\sqsupset	$\sqsupset$	\sqsubset	$\sqsubset$
\doteq	$\doteq$	\sqsupseteq	$\sqsupseteq$	\sqsubseteq	$\sqsubseteq$
\propto	$\propto$	\ni	$\ni$	\in	$\in$
\models	$\models$	\dashv	$\dashv$	\vdash	$\vdash$
\parallel	$\parallel$	\mid	$\mid$	\perp	$\perp$
\smile	$\smile$	\frown	$\frown$	\bowtie	$\bowtie$

$$x_1 = \frac{1}{A}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{A}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$x_n = \frac{1}{A}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-1} & b_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ann-1 & b_n \end{vmatrix} \tag{۲۳.۱}$$

فصل ۲

معادلات انتگرال فردهلم

۱.۲ مقدمه

۲.۲ روش تجزیه

۳.۲ روش محاسبه مستقیم

۴.۲ روش تقریب های متوالی

۵.۲ روش جایگذاری‌های متوالی

۶.۲ مقایسه بین روشهای مختلف

۷.۲ معادلات انتگرال فردهلم همگن

فصل ۳

معادلات انتگرال ولترا

فصل ۴

معادلات انتگرال-دیفرانسیل

فصل ۵

معادلات انتگرال منفرد

فصل ۶

معادلات انتگرال غیرخطی