فصل ۱

نظریه مجموعه‌ها [۲]

اساس ریاضیات را نظریه مجموعه‌ها تشکیل می‌دهد. از آن جا که نظریه شهودی مجموعه‌ها می‌تواند به پارادوکس‌های شناخته شده منتهی شود (مجموعه A همه مجموعه‌هایی را که عضو خود نیستند، هیچ کدام از گزاره‌های $A \in A$ و $A \notin A$ را نتیجه نمی‌دهد)، عمل کردن بر روی نظریه‌ی اصول‌های سیستم انتخاب شده منطقی خواهد بود. دو مورد متداول از چنین اصولی، که لزوماً هم‌ارز هستند عبارت‌اند از: سیستم‌های گودل– رنایز و رزملو– فرانکل. که مورد اول برای جبر عمومی مناسب‌تر است. هدف این فصلریال ارائه اصول بنیادی برای نظریه مجموعه‌ها براساس سیستم اگودل – برنایز است. کتاب‌های گودل [۴۰]، کوهن [۶۶] و ووپنکا، هاجک [۷۲] را می‌توان برای مطالعات بیشتر توصیه کرد.

۱.۱ فرمول‌های نظریه مجموعه‌ها

استرینگ [۳] های خاصی از نمادها را فرمول می‌نامند. نمادهایی که در این استرینگ‌ها ظاهر می‌شوند، عبارتند از:

(۱) متغیرها: با حروف کوچک یا بزرگ الفبای یونانی نشان داده می‌شوند و احتمالاً دارای زیرنویش عددی هستند (نباید محدودیتی روی تعداد متغیرها وجود داشته باشد).

(۲) رابطه یکانی: $\neg$

(۳) رابطه‌های دودویی: $\&$، V $\rightarrow \leftrightarrow$

(۴) سورها: $\exists\forall$

[۲] Set theory

[۳] Strings

(۵) پارانتز: ()

(۶) تساوی: =

(۷) عضویت: $\in$

فرمول، استرینگی است که می‌توان آن را با کاربرد چندین قاعده زیر به‌دست آورد. برای هر فرمول، تعیین می‌کنیم که کدام متغیرها آزاد و کدام متغیرها وابسته [۱] (مقید) نامیده شوند.

(۱) برای هر دو متغیر X, Y (که لزوماً مجزا نیستند)، استرینگ‌های $x = y$ و $x \in y$ فرمول و متغیرهای x و y آزاد هستند، و هیچ متغیر دیگری در این فرمول‌ها آزاد یا وابسته نیستند.

(۲) اگر f یک فرمول باشد، آنگاه $\neq (f)$ نیز یک فرمول است؛ یک متغیر در $\neq (f)$ آزاد (یا وابسته) است، اگر و تنها اگر در f آزاد (یا وابسته) باشد.

(۳) اگر f و g هر دو فرمول باشند و هیچ متغیری همزمان در f آزاد و در g وابسته نباشد یا در f وابسته و در g آزاد نباشد، آنگاه استرینگ‌های $(f)\&(g)$، $(f) \vee (g)$، $(f) \rightarrow (g)$ و $(f) \leftrightarrow (g)$ فرمول هستند؛ متغیر در فرمول‌های حاصله آزاد (یا وابسته) است اگر و تنها اگر حداقل در یکی از فرمول‌های f و g آزاد (یا وابسته) باشد.

(۴) اگر f یک فرمول و x متغیری باشد که در آن وابسته نیست، آنگاه $(\forall x)(f)$ و $(\exists x)(f)$ فرمول هستند؛ به طوری که متغیر x در فرمول حاصله وابسته است؛ و متغیری غیر از x، در آن آزاد (یا وابسته) است اگر و تنها اگر در f آزاد (یا وابسته) باشد.

مشاهدات نشان می‌دهد که هیچ متغیری همزمان در یک فرمول نمی‌تواند آزاد یا وابسته باشد. یک متغیر در فرمول زمانی واقع می‌شود اگر و تنها اگر در آن آزاد یا وابسته باشد. منظور از جمله، فرمولی بدون متغیر آزاد است.

فرمول‌های خاص، موضوع منطقی [۲] نامیده می‌شوند. اگر f، g و h سه فرمول باشند، آنگاه موارد زیر اصول منطقی هستند (از برخی پرانتزها صرف نظر شده است):

$$(۱)\ f \rightarrow (g \rightarrow f)$$

$$(۲)\ (f \rightarrow (g \rightarrow h)) \rightarrow ((f \rightarrow g) \rightarrow (f \rightarrow h))$$

$$(۳)\ ((\neg f) \rightarrow (\neq g)) \rightarrow (g \rightarrow f)$$

[۱] bound

[۲] logical axiom

$$(۴)\ (f \leftrightarrow g) \rightarrow (f \rightarrow g)$$

$$(۵)\ (f \leftrightarrow g) \rightarrow (g \rightarrow f)$$

$$(۶)\ (f \rightarrow g) \rightarrow ((g \rightarrow f) \rightarrow (f \leftrightarrow g))$$

$$(۷)\ (f \vee g) \leftrightarrow ((\neg f) \rightarrow g)$$

$$(۸)\ (f \& g) \leftrightarrow \neg((\neg f) \vee (\neg g))$$

$$(۹)\ ((\forall x))f) \rightarrow g$$

که در آن، x و y متغیرهای آزاد در f هستند و g با جایگزینی x به جای y به‌دست می‌آید.

$$(۱۰)\ ((\forall x)(f \rightarrow g)) \rightarrow (f \rightarrow g(\forall x)g)$$

که در آن، x متغیری است که در f واقع نمی‌شود.

$$(۱۱)\ ((\exists x)f) \leftrightarrow \neg((\forall x))\neg f)$$

که در آن، x متغیری است که در f واقع نمی‌شود.

$$(۱۲)\ x = x$$

$$(۱۳)\ x = y \rightarrow y = x$$

$$(۱۴)\ (x = y \& y = z) \rightarrow x = z$$

$$(۱۵)\ (x = y \& z = u) \rightarrow (x \in z \leftrightarrow y \in u)$$

که در آن x، y و z و u متغیر هستند.

منظور از نظریه مجموعه‌ها (finite) فرمول‌های این زبان است؛ این فرمول‌ها اصول نظریه نامیده می‌شوند.

منظور از اثبات در یک نظریه مفروض T، دنباله معین فرمول‌هاست به گونه‌ای که هر عضو دنباله یک اصل منطقی یا یک اصل از T باشد یا بتوان آن را از یک یا دو عضو دنباله، به کمک یکی از دو قاعده زیر به‌دست آورد:

(۱) g از f و $g \rightarrow f$ را به‌دست آورد؛

(۲) f را از $(\forall x)f$ به‌دست آورد.

منظور از اثبات یک فرمول در نظریه معین T، اثباتی است که فرمول مفروض به عنوان آخرین عضو آن باشد. حال اگر اثباتی از یک فرمول در T وجود داشته باشد، گفته می‌شود که فرمول قابل اثبات است.

اگر هر اصل از T اصلی از S باشد، آنگاه نظریه S بسطی از نظریه T می‌باشد. واضح است که هر فرمول قابل اثبات در T یک فرمول قابل اثبات در S نیز هست. اگر یکی از دو نظریه قوی‌تر از دیگری باشد، آنگاه دو نظریه هم‌ارز هستند واضح است که هر نظریه با نظریه‌ای هم‌ارز است که تعداد اصول برابر داشته و همه اصول آن جمله باشند.

برای هر جمله f و هر فرمول g، فرمول $f \to g$ در نظریه T قابل اثبات است اگر و تنها اگر g با افزودن f به عنوان یک اصل جدید در نظریه به‌دست آمده از T قابل اثبات باشد.

گفته می‌شود که نظریه T ناسازگار است اگر fای وجود داشته باشد به گونه‌ای که $f\&\neg f$ در T قابل اثبات باشد. مشخصاً، در یک نظریه سازگار، هر فمولی قابل اثبات است.

ما بر روی یک نظریه خاصی از مجموعه‌ها کار می‌کنیم و ریاضیات را به صورت غیررسمی انجام می‌دهیم. بنابراین باید در ذهن داشته باشیم که قضیه‌ها باید به صورت جملات بیان شوند و بتوانیم اثبات‌های غیررسمی آن‌ها را تفسیر کنیم تا اثبات دقیق آن‌ها به شکلی که در بالا داده شده است به‌دست آید. تعاریف به عنوان مخفف‌هایی برای فرمول‌های ویژه به کار می‌روند. به منظور معرفی نظریه مجموعه‌ها، باید با نظریه‌های ضعیف‌تری شروع کنیم.

۲.۱ نظریه رده‌ها [1]

هر عنصر مورد بررسی ما یک رده است. به عنوان مثال گفتن این که رده‌ای با این مشخصات وجود دارد معادل این است که بگوییم یک X با این مشخصات وجود دارد. منظور ما از مجموعه، رده‌ای مانند a است به گونه‌ای که Xای وجود داشته باشد که در آن، $a \in X$ باشد. اگر $a \in X$ آنگاه می‌گوییم که a عنصری از X است. بنابراین، مجموعه، معادل عناصر هر چیزی است منظور از رده سره [2]، رده‌ای است که مجموعه نباشد.

نظریه رده‌ها، ۹ اصل زیر را شامل می‌شود:

(C۱) اگر A و B دو رده باشند، به گونه‌ای که برای هر مجموعه a داشته باشیم $a \in A \leftrightarrow a \in B$، آنگاه $A = B$

[1] Proper class

[2] Theory of classes

(C۲) برای هر مجموعه a و b، یک مجموعه c وجود دارد به گونه‌ای که برای هر مجموعه x، $x \in c$ خواهد بود اگر و تنها اگر $x = a$ یا $x = b$

(C۳) یک رده A وجود دارد به گونه‌ای که برای هر مجموعه a، $a \in A$.

قبل از اینکه فهرست اصول را ادامه دهیم، باید دو تعریف را ارائه کنیم. مجموعه c، که وجود آن در (c۲) فرض شده است، مطابق با (C۱) به صورت یکتا با a و b تعیین می‌شود. این مجموعه با $\{a, b\}$ نشان داده می‌شود؛ فرض کنید $\{a\} = \{a, a\}$. برای هر مجموعه a و b، $\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. مجموعه $\langle a, b\rangle$ زوج مرتب [1] (یا فقط زوج) a و b نامیده می‌شود. حال فرض کنید $a = \langle a\rangle$؛ برای سه مجموعه a، b و c می‌توان نوشت: $\langle a, b, c\rangle = \langle a, \langle b, c\rangle\rangle$؛ و به طور مشابه برای چهار مجموعه و الی آخر.

(C۴) برای هر رده A رده‌ای مانند B وجود دارد طوری‌که برای هر مجموعه a، $a \in B$ خواهد بود اگر و تنها اگر دو مجموعه x و y با شرایط $a = \langle x, y\rangle$، $x \in y$ و $a \in A$ وجود داشته باشد.

(C۵) برای هر دو رده A و B رده‌ای مانند C وجود دارد طوری که برای هر مجموعه a، $a \in C$ خواهد بود اگر و تنها اگر $a \in A$ و $a \notin B$.

(C۶) برای هر رده A، رده‌ای مانند B وجود دارد به گونه‌ای که برای هر مجموعه a، $a \in B$ خواهد بود اگر و تنها اگر یک x با شرایط $\langle x, a\rangle \in A$ وجود داشته باشد.

(C۷) برای هر دو رده A و B رده‌ای مانند C وجود دارد به گونه‌ای که برای هر مجموعه a، $a \in C$ خواهد اگر و تنها اگر مجموعه‌هایی نظیر x و y با شرایط $a = \langle x, y\rangle$، $y \in B$ و $a \in A$ وجود داشته باشد.

(C۸) برای هر رده A، رده‌ای مانند B وجود دارد به گونه‌ای که برای هر مجموعه a، $a \in B$ خواهد بود اگر و تنها اگر مجموعه‌هایی نظیر x و y با ویژگی‌های $a = \langle x, y\rangle$ و $\langle y, x\rangle \in A$ وجود داشته باشند.

(C۹) برای هر رده a رده‌ای مانند B وجود دارد طوری که برای هر مجموعه a، $a \in B$ خواهد بود اگر و تنها اگر مجموعه‌هایی نظیر x، y و z با ویژگی‌های $a = \langle x, \langle y, z\rangle\rangle$ و $\langle y, \langle z, x\rangle\rangle \in A$ وجود داشته باشند.

قضیه ۱.۲.۱. *مجموعه‌های a, b, c, d مفروض است. ثابت کنید $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ اگر و تنها اگر $a = c$ و $b = d$.*

اثبات. به آسانی قابل اثبات است. $\square$

برای دو رده A و B داریم: $A \subseteq B$ (یا $B \supseteq A$) خواهد بود اگر برای هر مجموعه x، $X \in A$ نشان دهنده $x \in B$ باشد. می‌بینیم که A یک زیررده از B است، یا اگر A مجموعه باشد، A زیرمجموعه‌ای از

[1] ordered pair

B است. برای دو رده A و B داریم: $A \subset B$ (یا $B \supset A$) اگر $A \subseteq B$ و $A \neq B$ باشد و می‌گوییم که A یک زیررده سره از B است.

از (C۳) و (C۱) نتیجه می‌شود دقیقاً یک رده وجود دارد که هر مجموعه، عضو آن است. از علامت $\mathbf{V}$ برای نشان دادن این رده استفاده می‌کنیم و آن را رده عمومی [۱] می‌نامیم.

رده A یک رابطه است اگر هر عنصر آن یک زوج مرتب باشد.

از (C۴) نتیجه می‌شود که دقیقاً یک رابطه A وجود دارد که برای هر x و y، $\langle x, y\rangle \in A$ خواهد بود اگر و تنها اگر $x \in y$ باشد. این رابطه A را با علامت E نشان می‌دهیم.

برای هر دو رده A و B، رده یکتایی مانند C از (C۵) تعیین می‌شود که با $A \smallsetminus B$ نشان داده می‌شود. این رده دقیقاً عناصری از A را شامل می‌شود که در B وجود ندارد. این رده، تفاضل [۲] A و B نامیده می‌شود.

برای هر دو رده A و B داریم: $A \cap B = A \smallsetminus (A \smallsetminus B)$. این رده، اشتراک [۳] A و B نامیده می‌شود. این رده، دقیقاً شامل عناصری است که هم به A و هم به B تعلق دارند. برای بیش از دو مجموعه نیز تعریف می‌کنیم: $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C$ و غیره.

برای هر دو رده A و B داریم: $A \cup B = \mathbf{V} \smallsetminus ((\mathbf{V} \smallsetminus A) \cap (\mathbf{V} \smallsetminus B))$. این رده اجتماع [۴] A و B نامیده می‌شود. این رده دقیقاً شامل عناصری است که حداقل به یکی از دو رده A یا B تعلق داشته باشند و برای بیش از دو مجموعه نیز تعریف می‌کنیم $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ و الی آخر.

فرض کنید $\mathbf{V} \smallsetminus \mathbf{V} = 0$. این رده، رده تهی نامیده می‌شود. رده A غیرتهی است اگر $A \neq 0$. دو رده A و B مجزا [۵] هستند اگر $A \cap B$.

[۱] Universal class

[۲] difference

[۳] intersection

[۴] union

[۵] disjoint