به نام خدا

دانشجو: اصغر عابدیان

استاد راهنما: دکتر یحیی طالبی

استاد مشاور: دکتر ابولفضل بهزادی

دانشگاه مازندران

شهریور ۱۳۹۵

فهرست

چکیده

در این پایان نامه ما ایده آل‌های اول فازی روی یک حلقه غیر جابجایی را معرفی می‌کنیم. این مفهوم از اولی معادل با برش‌های سطح، ایده آل‌های اول موج‌دار)حلقه حلقه کردن(است. همچنین یک تعمیم را که به واسطه‌ی Baput و Kumbnojkar در سال (۱۹۹۳) را دسته بندی می‌کند که این معادل بودن در یک وضع ظاهر غیرجابجایی را ضعیف می‌سازد. ایده آل‌های فازی نیمه اول روی یک حلقه غیرجابجایی، تعریف شده و مشخص کننده بعنوان تقسیم از ایده آل‌ها می‌باشد. که این امکان را به ما می‌دهد که رادیکال اول فازی را طرح کنیم که برای استنباط اساسی از نظریه غیرجابجایی فازی به کار گرفته می‌شود.

یک مجموعه فازی روی یک مجموعه پایه X یک نگاشت $\mu : X \to [۰, ۱]$ می‌باشد.
یک ایده‌آل فازی)دو طرفه(I، یک مجموعه فازی است که هم ایده‌آل فازی راست و هم ایده‌آل فازی چپ است. توضیح اینکه در شرط زیر صدق می‌کند.

$$(i)I(x-y) \geq I(x) \wedge I(y) \quad ; \quad \forall \;\; x, y \in R$$
$$(ii)I(xy) \geq I(x) \vee I(y) \quad ; \quad \forall \;\; x, y \in R$$

در حقیقت $I(۱) \leq I(x) \leq I(۰)$.
همچنین یک مجموعه فازی $I : R \to [۰, ۱]$ یک ایده‌آل راست)چپ(است اگر و فقط اگر I_α یک ایده‌آل دو طرفه برای هر $I(۱) < \alpha \leq I(۰)$ باشد.

یک ایده‌آل محض P از حلقه R اول گفته می‌شود اگر شرط زیر برقرار باشد.

$$(*) \quad IJ \subseteq P \quad \forall\, I, J \text{ ایده‌آل} \implies I \subseteq P \text{ یا } J \subseteq P$$

اگر R جابه‌جایی باشد این معادل شرط خوبی است.

$$(**) \quad \forall\, xy \in P \;\; ; \;\; \forall\, x, y \in R \implies x \in P \text{ یا } y \in P$$

در هر دو شرط)*(حلقه R جابه‌جایی می‌باشد. در نتیجه یک حلقه اول گفته می‌شود هرگاه ایده‌آل صفر اول باشد. اگر R جابه‌جایی باشد، R اول است اگر و تنها اگر یک حوزه صحیح باشد. در یک محیط غیر جابه‌جایی شرط (**) محدود خواهد شد. در حقیقت ممکن است در حلقه‌های غیر حوزه صحیح ساده پیدا شود. وقتی نظریه پردازان حلقه غیر جابه‌جایی می‌گویند ایده‌آل در شرط (**) صدق می‌کند، کاملاً اول است. رابطه (*) را می‌توان برای حلقه‌های غیر جابه‌جایی به صورت زیر نوشت.

$$(***) \quad \text{هرگاه } xRy \subseteq P \;\; ; \;\; \forall\, x, y \in R \implies x \in P \text{ یا } y \in P$$

بنابراین اولی ایجاب می‌کند که اولی را اما برعکس آن حفظ نمی‌شود.

ایده‌آل اول فازی

یک ایده‌آل فازی غیر ثابت $P : R \to [0, 1]$ اول نامیده می‌شود اگر برای برخی از ایده‌آل‌های فازی I و J داشته باشیم.

$$IJ \leq P \implies I \leq P \text{ یا } J \leq P$$

یک ایده‌آل فازی غیر ثابت $P : R \to [0, 1]$ اول نامیده می‌شود اگر $IJ \leq P$ برای برخی از ایده‌آل فازی چپ (راست) I و J داشته باشیم $J \leq P$ یا $I \leq P$

$$IJ \leq P \overset{\forall \vartriangle I, J}{\implies} I \leq P \text{ یا } J \leq P$$

یک ایده‌آل فازی $P : R \to [0, 1]$، D_1–اول است اگر و تنها اگر P به صورت

$$P(x) = \begin{cases} 1 & if\ x \in Q \\ t & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

باشد. جایی که Q یک ایده‌آل اول از R است و $0 \leq t < 1$ می‌باشد.

یک ایده‌آل فازی غیر ثابت $P:R\to[0,1]$ اول نامیده می‌شود اگر P_α اول باشد. برای هر $p(0)\geq\alpha>p(1)$.
یک ایده‌آل فازی غیر ثابت $P:R\to[0,1]$ اول نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x,y\in R$، $P(xy)=P(0)$ آنگاه $P(x)=P(0)$ یا $P(y)=P(0)$.
پس D_2–اولی، D_3–اولی را ایجاب می‌کند اگرچه برعکس آن حفظ نمی‌شود. برای مثال: فرض کنیم

$$P(x)=\begin{cases} 1 & \text{اگر } x=0 \\ 0/8 & \text{اگر } x=4t\ ;\ t\neq 0 \\ 0/6 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

آنگاه D_3–اول است اما D_2–اول نیست. به دلیل اینکه نویسنده‌ها یک مفهوم قوی‌تر که آنها را اولی می‌نامند ارائه کردند.

تعاریف (Kumbhojkar, Bapat)

یک ایده‌آل فازی غیر ثابت $P : R \to [۰, ۱]$ اول نامیده می‌شد اگر برای هر $x, y \in R$،
$P(xy) = p(y)$ یا $p(xy) = p(x)$.
پیرو مقاله [۱۴] $D_۲$–اولی هر دو مفهوم معادل‌اند. که برهانش نیاز به جابه‌جایی بودن است چون آن از شرط (**) فوق الذکر استفاده نموده است. معادل بودن، موجب اشتباه شدن است. که در مثال زیر نشان داده شده است.

مثال

فرض کنید R حلقه ماتریس‌های ۲ × ۲ روی اعداد حقیقی باشد. ایده‌آل فازی

$$P(x)=\begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ ماتریس صفر باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به واسطه مثال (۱-۲) ایده‌آل صفر اول است. بنابراین P، D_2-اول و D_1-اول می‌باشد. با این حال

$$P\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)=P\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)=1$$

در حالی که $0 = P\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ در نتیجه P، D_4-اول نیست.

یک ایده‌آل فازی P، $D_۴$–اول است اگر و تنها اگر هر سطح برش P_α کاملاً اول برای همه $P(۱) \geq \alpha > P(۰)$ باشد.
فرض کنید R حلقه یکدار دلخواه باشد و $P : R \rightarrow [۰, ۱]$ یک ایده‌آل فازی باشد. اگر $D_۴$–اول باشد. آنگاه $D_۲$–اول است.
یک ایده‌آل فازی غیر ثابت $P : R \rightarrow [۰, ۱]$ اول نامیده می‌شود اگر $x_t y_s \leq P$ برای برخی از یگانه x_t و y_s، آنگاه داشته باشیم $y_s \leq p$ یا $x_t \leq P$.

یک ایده‌آل غیر ثابت $P: R \to [0, 1]$، اول نامیده می‌شود اگر $\langle x_t\rangle\langle y_s\rangle \le P$ برای برخی از یگانه x_t و y_s آنگاه $y_s \le P$ یا $x_t \le P$.

$(DO)'$- اولی اثبات شده در قضیه $(3-9)$ معادل با D_1-اولی می‌باشد. و در [14 قضیه $5-3$] (DO)- اولی اثبات شده معادل با D_1-اولی می‌باشد.

در این بخش یک تعریف جدید از ایده‌آل‌های فازی اول ارائه می‌دهیم که سازگار با اولی از برش‌های سطح می‌باشد.
فرض R حلقه دلخوه یا یکه باشد. و یک ایده‌آل فازی غیر ثابت $P : R \to [۰, ۱]$ اول است اگر

$$\forall x, y \in R \ : \ \bigwedge P(xRy) = P(x) \vee P(y)$$

فرض کنید R حلقه دلخواه یا یکه باشد و $P : R \to [۰, ۱]$ ایده‌آل فازی غیر ثابت از R باشد. شرایط زیر معادل‌اند:

(a) P، اول است.

(b) P_α برای همه $P(۰) \geq \alpha > P(۱)$، اول است.

(c) $\frac{R}{P_\alpha}$ برای همه $P(۰) \geq \alpha > P(۱)$، حلقه اول است.

(d) برای هر ایده‌آل I اگر $I(xry) \leq P(xry)$ برای هر $r \in R$ آنگاه $I(y) \leq P(y)$ یا $I(x) \leq P(x)$. به علاوه اگر R جابه‌جایی باشد، هر یک از حالت ها معادل با این است که P، $D_۴$–اول باشد.

هر ایده‌آل فازی اول به درستی شامل ایده‌آل فازی اول دیگری است.
یک ایده‌آل فازی اول P، مینیمال نامیده می‌شود اگر آن معادل با نگاشت مشخص سازی (خصوصیات) از ایده‌آل اول مینیمال باشد.
هر ایده‌آل فازی اول شامل یک ایده‌آل فازی اول مینیمال است.
فرض کنید R یک حلقه نوتری باشد. نمادی از کلاس‌های هم ارزی از ایده‌آل‌های فازی اول متناهی است.

فرض کنید $P : R \to [۰, ۱]$ یک ایده‌آل فازی غیر ثابت روی R باشد. P نامیده می‌شود.

DO'–نیمه اول، اگر $\langle x_t \rangle^۲ \leq P$ برای برخی از یگانه فازی x_t آنگاه $x_t \leq P$.

$D_۱$–نیمه اول، اگر $I^۲ \leq P$ برای برخی از ایده‌آل فازی I، آنگاه $I \leq P$.

$D_۲$–نیمه اول، اگر P_α نیمه اول باشد برای هر $P(۰) \geq \alpha > P(۱)$.

$D_۴$–نیمه اول، اگر $P(x)^۲ = P(x)$ برای هر $x \in R$.

فرض کنید R حلقه‌ی دلخواه و یکدار باشد. و $P : R \to [۰, ۱]$ یک ایده‌آل فازی غیر ثابت از R نیمه اول می‌باشد. هرگاه

$$\bigwedge P(xRx) = P(x) \qquad \forall\, k \in R$$

فرض کنید R حلقه‌ی دلخواه یکدار باشد و $P : R \to [۰, ۱]$ یک ایده‌آل فازی غیر ثابت از R باشد. در این صورت شرایط زیر معادل‌اند.

(a) P نیمه اول است.

(b) P_α نیمه اول است برای هر $P(۰) \geq \alpha > P(۱)$.

(c) $\frac{R}{P_\alpha}$ یک حلقه‌ی نیمه اول است برای همه $P(۰) \geq \alpha > P(۱)$.

(d) برای هر ایده‌آل فازی I، اگر $I(xrx) \leq P(xrx)$ برای همه‌ی $r \in R$ آنگاه P، $D_۴$–نیمه اول می‌باشد.

فرض کنید R یک حلقه یکدار باشد و P یک ایده‌آل نیمه اول از R و $x \in R$ بطوریکه $x \notin P$، آنگاه یک ایده‌آل اول M وجود دارد به طوری که $P \subseteq M$ و $x \notin m$.

یک ایده‌آل فازی نیمه اول است اگر و تنها اگر آن اشتراکی از ایده‌آل‌های فازی اول باشد.
اجتماع ایده‌آل‌های نیمه اول فازی R، یک ایده‌آل نیمه اول فازی می‌باشد.
فرض کنید R یک حلقه یکدار و I ایده‌آل فازی غیر ثابت روی R باشد. در این صورت ایده‌آل‌های فازی به صورت زیر اتفاق می‌افتد.

(i) اشتراک $F_۱$ از همه ایده‌آل‌های فازی نیمه اول شامل I

(ii) اشتراک $F_۲$ از همه ایده‌آل‌های فازی اول شامل I

(iii) ایده‌آل فازی $F_۳$ به واسطه $F_۳(x) = \bigvee\{t \in [۰, ۱]$ آنگاه $x \in Rad(I_t)\}$

یک ایده‌آل فازی نیمه اول است اگر و تنها اگر $F\ Rad(P) = P$.

برای هر ایده‌آل فازی غیر ثابت I

$$F\ Rad(I)(0) = I(0)$$

و

$$F\ Rad(I)(1) = I(1)$$

فرض کنید P و φ ایده‌آل فازی غیر ثابت روی R باشند. حالت‌های زیر حفظ می‌شوند.

$$(i) F\ Rad(F\ Rad(P)) = F\ Rad(P)$$

$$(ii) Rad(R/F\ Rad(R)) = \circ$$

$$(iii) if\ P \leq \varphi\ then\ F\ Rad(P) \leq F\ Rad(\varphi)$$

$$(iv) F\ Rad(P \cap \varphi) = F\ Rad(P) \cap F\ Rad(\varphi)$$

منابع

■ A. Rosenfeld, Fuzzy groups, J. Math. Anal. Appl. 35 (1971) 512-517.

■ W.J. Liu, Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals, Fuzzy Sets Syst. 8 (1982) 133-139.

■ H. V. Liu, Fuzzy invariant sbgroups and fuzzy ideals, Fuzzy Sets Syst. 37 (1990) 237-243.

■ D.S. Malik, J.N. Moderson, Fuzzy prime ideals of a ring, Fuzzy Sets Syst. 37 (1990) 93-98.

■ L.A. Zadeh. Fuzzy sets, If. Control 8 (1965) 338-353.

■ H.V. Kumbhojkar, M.S. Bapat, On prime and primary fuzzy ideals and their radicals, Fuzzy Sets Syst. 53 (1993) 203-216.

■ J.N. Moderson , K. Bhutani, A. Rosenfeld, Fuzzy Group Thery, Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 182, Springer, 2005.