حداکثر خروجی تولید شود و $(\theta X_o, Y_o)$ روی مرز مجموعه امکان تولید قرار گیرد؛ لذا مساله زیر باید حل شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & (\theta X_o, Y_o) \in T_C \end{aligned} \tag{۵,۲}$$

با توجه به ساختار T_C مدل ۶,۲ گسترده‌ی مدل ۵,۲ است.

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \leq \theta X_o, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \geq Y_o, \\ & \lambda_j \geq 0, \qquad\qquad j = 1, \cdots, n. \end{aligned} \tag{۶,۲}$$

مدل ۶,۲ را فرم پوششی[۴۵] مدل CCR درماهیت ورودی[۴۶] می‌نامند.

[۴۵] Envelopment form

[۴۶] Input oriented

مدل ۶,۲ به فرم مدل ۷,۲ بازنویسی می‌گردد.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \theta \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j X_j + S^- = \theta X_o, \\
& \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j Y_j - S^+ = Y_o, \\
& \lambda_j \geq ۰, \qquad\qquad j = ۱, \cdots, n, \\
& S^- \geq ۰, \\
& S^+ \geq ۰.
\end{aligned} \tag{۷,۲}$$

۱.۱.۳.۲ کارایی در فرم پوششی مدل CCR در ماهیت ورودی

برای بدست آوردن مقدار مازاد ورودی و کمبود خروجی باید مساله دو مرحله‌ای زیر حل شود:

* مرحله اول: با حل مدل ۶,۲،θ^* به عنوان مقدار بهینه این مدل بدست می‌آید.

* مرحله دوم: حل مساله خطی ۱۵,۲

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta^* x_{io}, && i = 1, \cdots, m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, && r = 1, \cdots, s, \\
& \lambda_j \geq 0, && j = 1, \cdots, n, \\
& s_i^- \geq 0, && i = 1, \cdots, m, \\
& .s_r^+ \geq 0, && r = 1, \cdots, s.
\end{aligned}
\qquad (۸,۲)
$$

که (λ, S^-, S^+) متغیرهای مساله هستند.

فرض کنید $(\theta^*, \lambda^*, S^{-*}, S^{+*})$ جواب بهینه مدل دو مرحله ای مذکور باشد. اگر در مرحله اول $\theta^* = 1$ و در مرحله دوم همه متغیرهای کمکی صفر باشند یعنی $(S^{-*}, S^{+*}) = (0, 0)$ آنگاه DMU_o تحت ارزیابی را کارا(کارای قوی) گویند. اگر $\theta^* = 1$ و حداقل در یکی از جواب‌های مدل پوششی $(S^{-*}, S^{+*}) \neq (0, 0)$ آنگاه DMU_o را کارای ضعیف[۴۷] گویند. اگر $\theta^* \neq 1$، آنگاه DMU_o را ناکارا گویند.

[۴۷] Weak Efficienct

۲.۱.۳.۲ مجموعه مرجع

برای DMU_o ناکارا مجموعه مرجع[۴۸] E_o به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_o = \{j \mid \text{در یکی از جواب‌های بهینه در ارزیابی } DMU_o \text{ مثبت باشد. } \lambda_j^*\}.$$

۳.۱.۳.۲ فعالیت بهبود یافته

در فرم پوششی مدل CCR ماهیت ورودی ۷,۲ جواب بهینه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\theta^* X_o = \sum_{j \in E_o} \lambda_j^* X_j + S^{-^*}$$

$$Y_o = \sum_{j \in E_o} \lambda_j^* X_j - S^{+^*}$$

برای DMU_o با بردار ورودی X_o و بردار خروجی Y_o، امکان تولید

$$(\hat{X}_o, \hat{Y}_o) = \left(\left(\sum_{j \in E_o} \lambda_j^* X_j, \sum_{j \in E_o} \lambda_j^* Y_j \right) = (\theta^* X_o - S^{-^*}, Y_o + S^{+^*}) \right)$$

را فعالیت بهبودیافته[۴۹] گویند که در حقیقت تصویر امکان تولید X_o و Y_o روی مرز کارای قوی می‌باشد. در واقع فعالیت بهبود یافته فوق به مفهوم پاراتو کارا می‌باشد(یعنی کارای قوی است).

[۴۸] Reference Set
[۴۹] Improved activity

۲.۳.۲ فرم مضربی مدل CCR در ماهیت ورودی

دوگان فرم پوششی مدل CCR درماهیت ورودی (۶,۲) به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & U^tY_o \\
\text{s.t.} \quad & U^tY_j - V^tX_j \leq ۰, \quad j = ۱, \cdots, n, \\
& V^tX_o = ۱, \\
& U \geq ۰, \\
& V \geq ۰.
\end{aligned}
\tag{۹,۲}
$$

مدل ۹,۲ به فرم مضربی[۵۰] مدل CCR درماهیت ورودی معروف است.

۱.۲.۳.۲ کارایی در فرم مضربی مدل CCR در ماهیت ورودی

فرض کنید (V^*, U^*) جواب بهینه فرم مضربی مدل CCR درماهیت ورودی (۹,۲) باشد. اگر $U^{t*}Y_o = ۱$ و حداقل یک جواب بهینه $(V^*, U^*) > ۰$ وجود داشته باشد، آنگاه DMU_o را کارا(کارای قوی) گویند. اگر $U^{t*}Y_o = ۱$ و در همه جواب‌های بهینه حداقل یک مولفه‌ی صفر وجود داشته باشد، آنگاه DMU_o را کارای ضعیف گویند. اگر $U^{t*}Y_o \neq ۱$ ، آنگاه DMU_o ناکارا است.

[۵۰] Multiplier form

۳.۳.۲ فرم مضربی و پوششی مدل CCR، εدار در ماهیت ورودی

فرم مضربی مدلCCR، εدار در ماهیت ورودی در سال ۱۹۸۴ توسط چارنز و کوپر [۳۶]به صورت زیر تعریف شده است:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0, \quad && j = 1, \cdots, n, \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1, \\
& u_r \geq \varepsilon, && r = 1, \cdots, s, \\
& v_i \geq \varepsilon, && i = 1, \cdots, m.
\end{aligned}
\tag{۱۰,۲}
$$

کارایی در این مدل مشابه بخش ۱.۲.۳.۲ می‌باشد.

دو آل مدل ۱۰,۲ می‌تواند به صورت زیر فرمولبندی شود:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \theta - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \right) & & \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{io}, & & i = 1, \cdots, m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, & & r = 1, \cdots, s, \\
& \lambda_j \geq 0, & & j = 1, \cdots, n, \\
& s_i^- \geq 0, & & i = 1, \cdots, m, \\
& .s_r^+ \geq 0, & & r = 1, \cdots, s. \\
& \theta \;\; \text{Free in sign.} & &
\end{aligned} \tag{۱۱,۲}
$$

مدل ۱۱,۲ فرم پوششی مدل CCR، εدار در ماهیت ورودی می‌باشد [۱۰۴]. وضعیت کارایی در این حالت مشابه بخش ۱.۱.۳.۲ محاسبه می‌گردد.

۴.۳.۲ فرم پوششی مدل CCR در ماهیت خروجی

فرم پوششی با ماهیت خروجی[۵۱] مدل CCR سعی در پیدا کردن واحد مجازی روی مرز T_C دارد که با همان ورودی حداکثر خروجی را تولید کند؛ به عبارت دیگر در ماهیت خروجی مدل CCR، هدف انبساط Y_o به φY_o می‌باشد، به طوری که حداکثر ورودی X_o مصرف شود و $(X_o, \varphi Y_o)$، روی مرز

[۵۱] Output Oriented